



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

**ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΤΩΝ
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ**

Γραπτές Ασκήσεις 2008

1. (α') Δείξτε ότι $\log(n!) = \Theta(n \log n)$.
(β') Δείξτε ότι
 - i. $n! = \mathcal{O}(n^n)$
 - ii. $n! = \Omega(2^n)$
2. (α') Ποιες από τις παρακάτω ισότητες ισχύουν (δικαιολογείστε την απάντησή σας):
 - (ι) $(A - B) - C = A - (B \cup C)$
 - (ιι) $(A - B) - C = (A - C) - B$
 - (ιιι) $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$(β') (ι) Δώστε ένα παράδειγμα για να δείξετε ότι ένα σύνολο που είναι τομή δυο αριθμήσιμων συνόλων μπορεί να είναι και αυτό αριθμήσιμο
(ιι) Δώστε ένα παράδειγμα για να δείξετε ότι ένα σύνολο που είναι τομή δυο αριθμήσιμων συνόλων μπορεί να είναι πεπερασμένο
(γ') (ι) Δείξτε ότι το σύνολο όλων των θετικών ρητών αριθμών είναι αριθμήσιμο σύνολο (Υπόδειξη: Θεωρήστε όλα τα σημεία στο πρώτο τεταρτημόριο του επιπέδου των οποίων οι συντεταγμένες x, y είναι ακέραιοι)
(ιι) Δείξτε ότι η ένωση αριθμήσιμου πλήθους αριθμήσιμων συνόλων είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο
(δ') Δείξτε ότι για οποιοδήποτε θετικό ακέραιο $n > 1$

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \dots \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$

3. Ορίστε μια γραμματική που να περιγράφουν τις παρακάτω γλώσσες:

- (α') Η γλώσσα L_1 περιέχει συμβολοσειρές από 0 και 1 με περισσότερα 0 από 1.
- (β') $L_2 = \{a^{2i}cb^{2j+1} \mid i \geq 1, j \geq 1\}$.
- (γ') $L_3 = \{a^i b^j c^k d^j e^k \mid i \geq 1, j \geq 1, k \geq 1\}$.

(δ') $L_4 = \{x | x \in \{a, b\}^* \text{ και το } x \text{ δεν περιέχει δυο συνεχόμενα } a\}$.

(ε') $L_5 = \{a^i b^j c^q | i + j = q, i \geq 1, j \geq 1\}$.

(ϛ') Η γλώσσα L_6 περιέχει συμβολοσειρές από a και b με ίσο αριθμό a και b .

4. (α') Έστω το τετράγωνο που σχηματίζεται από τα σημεία $(0,0)$, $(8,0)$, $(0,10)$ και $(8,10)$. Πόσα είναι τα πιθανά διαφορετικά μονοπάτια που μπορούμε να ακολουθήσουμε από το σημείο $(1,2)$ έως το σημείο $(8,10)$ εάν θεωρήσουμε ότι μετακινούμαστε με βήμα είτε μία μονάδα κάθετα είτε μια μονάδα στον οριζόντιο.
- (β') Πόσες διαφορετικές συμβολοσειρές δημιουργούνται διατάσσοντας τα γράμματα της λέξης *SOCIOLOGICAL* (α) σε σειρά (β) σε κύκλο. Σε πόσες από αυτές τα γράμματα A και G είναι γειτονικά.
- (γ') Βρείτε τον αριθμό των μεταθέσεων των γραμμάτων a, b, c, d, e, f, g έτσι ώστε να **μην** εμφανίζεται ούτε η ακολουθία *beg* ούτε η ακολουθία *cad*.
- (δ') Πόσες δυαδικές σχέσεις υπάρχουν στο σύνολο $1, 2, 3, \dots, n$; Πόσες από αυτές είναι συμμετρικές και πόσες ανακλαστικές;
5. (α') Έστω R μια σχέση ισοδυναμίας πάνω σε ένα σύνολο A . Έστω $\{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n\}$ ένα σύνολο υποσυνόλων του A που είναι τέτοια ώστε: $A_i \not\subseteq A_j$ για $i \neq j$ και a, b περιέχονται σε ένα από αυτά αν και μόνο αν το διατεταγμένο ζεύγος (a, b) ανήκει στην R . Δείξτε ότι το $\{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n\}$ είναι μια διαμέριση του A .
- (β') Έστω $\{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n\}$ μια διαμέριση του A . Ορίζουμε μια διμελή σχέση R πάνω στο A τέτοια ώστε ένα διατεταγμένο ζεύγος (a, b) να ανήκει στην R αν και μόνο αν τα a και b είναι στο ίδιο σύμπλοκο της διαμέρισης. Δείξτε ότι η R είναι μια σχέση ισοδυναμίας.
6. Η λύση της αναδρομικής σχέσης

$$a_r = Aa_{r-1} + B3^r$$

είναι

$$a_r = C2^r + D3^{r+1}$$

Δεδομένου ότι $a_0 = 19$ και $a_1 = 50$, προσδιορίστε τις σταθερές A, B, C , και D .

7. Έστω

$$4a_r + C_1 a_{r-1} + C_2 a_{r-2} = f(r)$$

μια γραμμική αναδρομική σχέση δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Για κάποιες συνοριακές συνθήκες a_0 και a_1 , η λύση της αναδρομικής σχέσης είναι $1 - 2r + 3 \cdot 2^r$. Προσδιορίστε τα a_0, a_1, C_1, C_2 και $f(r)$ (η λύση ΔΕΝ είναι μοναδική).

8. Επιλύστε την αναδρομική σχέση

$$a_r + 3a_{r-1} + 2a_{r-2} = f(r)$$

με συνοριακή συνθήκη $a_0 = a_1 = 0$, όπου:

$$\bullet f(r) = \begin{cases} 1 & r = 2 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$
$$\bullet f(r) = \begin{cases} 1 & r = 5 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

9. Υπάρχουν δύο είδη σωματιδίων μέσα σε ένα πυρηνικό αντιδραστήρα. Σε κάθε δευτερόλεπτο, ένα σωματίδιο α θα διασπαστεί σε 3 σωματίδια β , και ένα σωματίδιο β θα διασπαστεί σε ένα σωματίδιο α και δύο σωματίδια β . Αν την χρονική στιγμή $t = 0$ υπάρχει ένα μόνο σωματίδιο α στον αντιδραστήρα, πόσα σωματίδια υπάρχουν συνολικά όταν $t = 100$;

10. Επιλύστε την εξίσωση διαφορών $a_r^2 - a_{r-1}^2 = 1$ δεδομένου ότι $a_0 = 2$.

Παράδοση ασκήσεων έως Παρασκευή 25 Ιουλίου 2008