



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Διακριτά Μαθηματικά

Ασυμπτωτική Συμπεριφορά Αριθμητικών
Συναρτήσεων (Παραδείγματα)

Ορισμοί: Έστω δυο αριθμητικές συναρτήσεις $f(n)$ και $g(n)$. Τότε

- $f(n) = O(g(n))$ εάν υπάρχουν θετικές σταθερές $n_0, c \neq 0$ τέτοιες ώστε να ισχύει $|f(n)| \leq cg(n), \forall n \geq n_0$.
- $f(n) = o(g(n))$ εάν υπάρχουν θετικές σταθερές $n_0, c \neq 0$ τέτοιες ώστε να ισχύει $|f(n)| < cg(n), \forall n \geq n_0$.
- $f(n) = \Omega(g(n))$ εάν υπάρχουν θετικές σταθερές $n_0, c \neq 0$ τέτοιες ώστε να ισχύει $|f(n)| \geq cg(n) \forall n \geq n_0$.
- $f(n) = \omega(g(n))$ εάν υπάρχουν θετικές σταθερές $n_0, c \neq 0$ τέτοιες ώστε να ισχύει $|f(n)| > cg(n) \forall n \geq n_0$.
- $f(n) = \Theta(g(n))$ εάν υπάρχουν θετικές σταθερές $n_0, c_1 \neq 0$ και $c_2 \neq 0$ τέτοιες ώστε να ισχύει $c_2g(n) \leq |f(n)| \leq c_1g(n), \forall n \geq n_0$.

Lemma 1. Έστω δυο αριθμητικές συναρτήσεις $f(n)$ και $g(n)$. Τότε $f(n) = o(g(n))$ αν και μόνο αν $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$

Lemma 2. Έστω δυο αριθμητικές συναρτήσεις $f(n)$ και $g(n)$. Τότε $f(n) = \omega(g(n))$ αν και μόνο αν $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$

Lemma 3. Έστω δυο αριθμητικές συναρτήσεις $f(n)$ και $g(n)$. Εάν ισχύει $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = L$ όπου $0 \leq L < \infty$ τότε $f(n) = O(g(n))$

Lemma 4. Έστω δυο αριθμητικές συναρτήσεις $f(n)$ και $g(n)$. Εάν ισχύει $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = L$ όπου $0 < L \leq \infty$ τότε $f(n) = \Omega(g(n))$

Lemma 5. Έστω δυο αριθμητικές συναρτήσεις $f(n)$ και $g(n)$. Εάν ισχύει $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = L$ όπου $0 < L < \infty$ τότε $f(n) = \Theta(g(n))$

Examples

Example 1. Δείξτε ότι $40n + 100 = O(n^2 + 10n + 300)$

Λύση

Για να δείξουμε το παραπάνω αρκεί να βρούμε θετικές σταθερές $n_0, c \neq 0$ τέτοιες ώστε να ισχύει $|f(n)| \leq cg(n)$. Παρατηρούμε ότι για $n > 0$ ισχύει $0 \leq 40n + 100$. Άρα αναζητούμε πότε ισχύει η ανισότητα $0 \leq 40n + 100 \leq n^2 + 10n + 300 \Leftrightarrow 0 \leq n^2 - 30n + 200$ Αναζητώντας πότε ισχύει η παραπάνω ανισότητα, βρίσκουμε την διακρίνουσα και τις λύσεις του τριωνύμου για να προσδιορίσουμε το πρόσημο του. $\Delta = 900 - 4 \cdot 200 = 100$
 $n_{1,2} = \frac{30 \pm 10}{2}$ Άρα οι δυο λύσεις είναι $n = -10$ και $n = 40$. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι το ζητούμενο ισχύει για $n \geq 40$ και $c = 1$

Example 2. Δείξτε ότι $\frac{1}{n} + 7 = O(n^2 + 1)$

Λύση

Όμοια με το example 1 αναζητούμε c, n_0 έτσι ώστε να ισχύει η ανισότητα που υποδεικνύει ο ορισμός. Έστω $n \geq 7$ άρα και $n^2 \geq n \geq 7$ ($\Sigma 1$). Επίσης από την ($\Sigma 1$) συμπεραίνουμε ότι $n \geq 1$ δηλ. $\frac{1}{n} \leq 1$ ($\Sigma 2$). Τέλος αν προσθεσουμε τις ανισότητες ($\Sigma 1$) και ($\Sigma 2$) έχουμε $\frac{1}{n} + 7 \leq n^2 + 1$ (Ισχύει για $n \geq 7$ και $c = 1$).

Example 3. Δείξτε ότι $8\sqrt{n} = O(\frac{1}{2}n)$

Λύση

Όμοια αναζητούμε c, n_0 έτσι ώστε να ισχύει η ανισότητα που υποδεικνύει ο ορισμός, δηλ. $|8\sqrt{n}| \leq c(\frac{1}{2}n) \Rightarrow 8\sqrt{n} \leq c(\frac{1}{2}n) \Rightarrow \sqrt{n} \leq \frac{c}{16}n$ θέτουμε $c' = \frac{16}{c}$, άρα $c' \cdot \sqrt{n} \leq n \Rightarrow \frac{n}{\sqrt{n}} \geq c' \Rightarrow \sqrt{n} \geq c' \Rightarrow n \geq c'^2$

Άρα για $c > 0$ και $n \geq (\frac{16}{c})^2$ αποδεικνύεται το ζητούμενο.

Example 4. Δείξτε ότι $\ln(n) = o(n)$

Λύση

Χρησιμοποιώντας το Lemma 1 έχουμε:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{n} \stackrel{l'Hopital}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = 0 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Example 5. Δείξτε ότι $\sin(n) = O(n)$

Λύση

Χρησιμοποιώντας το Lemma 3 έχουμε:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0 \text{ διότι:}$$

$$\left| \frac{\sin(n)}{n} \right| \leq \left| \frac{1}{n} \right| \text{ και } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Example 6. Δείξτε ότι $4 \cdot n - 3 \cdot \sin(n) = O(2 \cdot n + \sin(n))$

Λύση

Όμοια από το Lemma 3 έχουμε:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot n - 3 \cdot \sin(n)}{2 \cdot n + \sin(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - 3 \cdot \frac{\sin(n)}{n}}{2 + \frac{\sin(n)}{n}} = \frac{4}{2} = 2$$

Example 7. Δείξτε ότι $\sin(\frac{1}{n}) = O(\frac{1}{n})$

Λύση

Όμοια από το Lemma 3 έχουμε:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} \stackrel{l'Hopital}{=} \lim_{m \rightarrow 0} \frac{\sin(m)}{m} = 1$$

Example 8. Δείξτε ότι $\sum_{i=1}^n (i^k) = \Theta(n^{k+1})$ για $k \geq 1$

Λύση

- $\sum_{i=1}^n (i^k) \leq \sum_{i=1}^n (n^k) = n \cdot n^k = n^{k+1} = O(n^{k+1})$
- $\sum_{i=1}^n (i^k) \geq \sum_{i=\lceil \frac{n}{2} \rceil}^n (i^k) \geq \sum_{i=\lceil \frac{n}{2} \rceil}^n ((\frac{n}{2})^k) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil \cdot (\frac{n}{2})^k \geq (\frac{n}{2}) \cdot (\frac{n}{2})^k = (\frac{1}{2})^{k+1} \cdot n^{k+1} = \Omega(n^{k+1})$

Example 9. Δείξτε ότι $(2 + \sin(n)) \cdot n = O(n)$

Λύση

Έστω ότι ανατρέχουμε στο *Lemma 3* τότε παρατηρούμε ότι το όριο $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2 + \sin(n)) \cdot n}{n}$ δεν υπάρχει. Σαν αποτέλεσμα αναζητάμε διαφορετικό τρόπο απόδειξης:
 Γνωρίζουμε ότι ισχύει $-1 \leq \sin(n) \leq 1$
 Άρα $(2 + \sin(n)) \cdot n \leq 3 \cdot n$ από το οποίο συμπεραίνουμε ότι $(2 + \sin(n)) \cdot n = O(n)$