

# Μάθημα: Ρομποτικός Έλεγχος

## Αυτόματος Έλεγχος Ρομπότ – 2 (Μη-Γραμμικός Ρομποτικός Έλεγχος)

Κων/νος Τζαφέστας

Τομέας Σημάτων, Ελέγχου & Ρομποτικής  
Σχολή Ηλεκτρ. Μηχ/κών & Μηχ/κών Υπολ., Ε.Μ.Π.

Τηλ.: (210) 772-3687 (Κτήριο Ηλεκτρ., Γραφείο 21.11)

E-mail: [ktzaf@cs.ntua.gr](mailto:ktzaf@cs.ntua.gr)

Web: <http://www.softlab.ntua.gr/~ktzaf/>



## «Τοπικός» Έλεγχος (PD) Ρομποτικών Αρθρώσεων (Local Joint PD control)



# «Τοπικός» Έλεγχος Ρομποτικών Αρθρώσεων – Ορισμός

Local PD Joint Controller:  
(τοπικός έλεγχος PD)

$$\underline{\tau} = K_P \cdot \underbrace{(\underline{q}_d - \underline{q})}_{\underline{e}} + K_D \cdot \underbrace{(\dot{\underline{q}}_d - \dot{\underline{q}})}_{\dot{\underline{e}}}$$

όπου:  $K_P = \text{diag}[K_{Pi}]_{(i=1, \dots, n)}$  και  $K_D = \text{diag}[K_{Di}]_{(i=1, \dots, n)}$

και  $\underline{e}$ : σφάλμα παρακολούθησης τροχιάς (στις αρθρώσεις)

Δηλαδή:

$$\begin{bmatrix} \tau_1(t) \\ \tau_2(t) \\ \vdots \\ \tau_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{P1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_{P2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_{Pn} \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} q_{d1}(t) - q_1(t) \\ q_{d2}(t) - q_2(t) \\ \vdots \\ q_{dn}(t) - q_n(t) \end{bmatrix}}_{\underline{e}(t)} + \begin{bmatrix} K_{D1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_{D2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_{Dn} \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{q}_{d1}(t) - \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_{d2}(t) - \dot{q}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{q}_{dn}(t) - \dot{q}_n(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\underline{e}}(t)}$$



## Ευστάθεια Τοπικού Ρομποτικού Ελέγχου Αρθρώσεων (1)

Έστω Τοπικός Έλεγχος Θέσης PD ρομποτικών αρθρώσεων ( $\dot{q}_d = 0$ ):

$$\underline{\tau} = K_P \cdot (\underline{q}_d - \underline{q}) - K_D \dot{\underline{q}} \quad (1)$$

Μελέτη Ευσταθείας κατά Lyapunov

Ορισμός Συνάρτησης Lyapunov: 
$$V(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{(\underline{e}^T \cdot K_P \cdot \underline{e})}_{\text{«δυναμική» ενέργεια}} + \underbrace{\dot{\underline{q}}^T \cdot D(\underline{q}) \cdot \dot{\underline{q}}}_{\text{κινητική ενέργεια}} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \dot{V} = -\underline{e}^T \cdot K_P \cdot \dot{\underline{q}} + \dot{\underline{q}}^T \cdot \underbrace{D(\underline{q}) \cdot \ddot{\underline{q}}}_{\text{circled}} + \frac{1}{2} \cdot \dot{\underline{q}}^T \cdot \dot{D} \cdot \dot{\underline{q}} \quad (3)$$

Αλλά (δυναμικό ρομποτικό μοντέλο):  $\underline{\tau} = D(\underline{q}) \cdot \ddot{\underline{q}} + C(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) \cdot \dot{\underline{q}} + \underline{g}(\underline{q}) \quad (4)$

Θεωρώντας αμελητέα την επίδραση των όρων βαρύτητας (δηλ.:  $\underline{g}(\underline{q})=0$ ):

$$D(\underline{q}) \cdot \ddot{\underline{q}} = \underline{\tau} - C(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) \cdot \dot{\underline{q}} \quad (5)$$



# Δυναμικό Ρομποτικό Μοντέλο (Υπενθύμιση)

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{D}(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (-\mathbf{J}^T \mathbf{F}_e)$$

$$\text{όπου: } \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = [h_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})]_{i=1, \dots, n} = \left[ \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (h_{ijk}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k) \right]_{i=1, \dots, n}$$

$$\text{με: } h_{ijk}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{\partial D_{ij}}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial D_{jk}}{\partial q_i}$$

Μπορούμε επίσης να γράψουμε:

$$\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \cdot \dot{\mathbf{q}} = \left[ \sum_{j=1}^n (C_{ij}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \cdot \dot{q}_j) \right]_{i=1, \dots, n}$$

$$\text{όπου: } C_{ij}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{k=1}^n (h_{ijk}(\mathbf{q}) \cdot \dot{q}_k)$$

Αποδεικνύεται ότι η μήτρα:  $(\dot{\mathbf{D}} - 2\mathbf{C})$  είναι αντισυμμετρική

$$\text{Δηλαδή ισχύει: } \mathbf{w}^T \cdot (\dot{\mathbf{D}} - 2\mathbf{C}) \cdot \mathbf{w} = 0, \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \quad (6)$$



## Ευστάθεια Τοπικού Ρομποτικού Ελέγχου Αρθρώσεων (2)

Στην περίπτωση αυτή ( $\mathbf{g}(\mathbf{q})=0$ ) παίρνουμε για τη συνάρτηση  $\dot{V} = \frac{d}{dt}[V(\mathbf{q})]$

$$(3) \wedge (5) \Rightarrow \dot{V} = -\underline{\mathbf{e}}^T \cdot \mathbf{K}_p \cdot \underline{\dot{\mathbf{q}}} + \underline{\dot{\mathbf{q}}}^T \cdot (\underline{\boldsymbol{\tau}} - \mathbf{C} \cdot \underline{\dot{\mathbf{q}}}) + \frac{1}{2} \cdot \underline{\dot{\mathbf{q}}}^T \cdot \dot{\mathbf{D}} \cdot \underline{\dot{\mathbf{q}}}$$

και αντικαθιστώντας τον τοπικό ελεγκτή (1):

$$\Rightarrow \dot{V} = -\underline{\mathbf{e}}^T \cdot \cancel{\mathbf{K}_p} \cdot \underline{\dot{\mathbf{q}}} + \underline{\dot{\mathbf{q}}}^T \cdot (\cancel{\mathbf{K}_p} \cdot \underline{\mathbf{e}} - \mathbf{K}_D \cdot \underline{\dot{\mathbf{q}}} - \mathbf{C} \cdot \underline{\dot{\mathbf{q}}}) + \frac{1}{2} \cdot \underline{\dot{\mathbf{q}}}^T \cdot \dot{\mathbf{D}} \cdot \underline{\dot{\mathbf{q}}}$$

$$\Rightarrow \dot{V} = -\underline{\dot{\mathbf{q}}}^T \cdot \mathbf{K}_D \cdot \underline{\dot{\mathbf{q}}} + \underline{\dot{\mathbf{q}}}^T \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \dot{\mathbf{D}} - \mathbf{C} \right) \cdot \underline{\dot{\mathbf{q}}}$$

$$= 0, \text{ από σχέση (6)}$$

$$\text{Άρα: } \dot{V} = -\underline{\dot{\mathbf{q}}}^T \cdot \mathbf{K}_D \cdot \underline{\dot{\mathbf{q}}} < 0$$

➔ Ρομποτικό Σύστημα με τοπικό ελεγκτή αρθρώσεων ευσταθές, υπό την υπόθεση αμελητέας επίδρασης βαρυτικών όρων ( $\mathbf{g}(\mathbf{q})=0$ )



# Μη Γραμμικός Ρομποτικός Έλεγχος βάσει Μοντέλου



## Ρομποτικός έλεγχος υπολογιζόμενης ροπής (computed torque) (1)

Computed-Torque Controller (έλεγχος υπολογιζόμενης ροπής) (στο χώρο των αρθρώσεων)

$$\begin{cases} \underline{\tau} = D(\underline{q}) \cdot \underline{u} + C(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) \cdot \dot{\underline{q}} + \underline{g}(\underline{q}) & (1-1) \\ \underline{u} = \ddot{\underline{q}}_d + K_D \cdot \underbrace{(\dot{\underline{q}}_d - \dot{\underline{q}})}_{\dot{\underline{e}}} + K_P \cdot \underbrace{(\underline{q}_d - \underline{q})}_{\underline{e}} & (1-2) \end{cases}$$

όπου  $\underline{e}$ : σφάλμα παρακολούθησης τροχιάς (στις αρθρώσεις)

Δηλαδή, τώρα έχουμε για το σήμα ελέγχου  $\underline{u}$  ότι ισχύει:

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{q}_{d1}(t) \\ \ddot{q}_{d2}(t) \\ \vdots \\ \ddot{q}_{dn}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{D1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_{D2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_{Dn} \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{q}_{d1}(t) - \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_{d2}(t) - \dot{q}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{q}_{dn}(t) - \dot{q}_n(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\underline{e}}(t)} + \begin{bmatrix} K_{P1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_{P2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_{Pn} \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} q_{d1}(t) - q_1(t) \\ q_{d2}(t) - q_2(t) \\ \vdots \\ q_{dn}(t) - q_n(t) \end{bmatrix}}_{\underline{e}(t)}$$

➔ **Βασική Υπόθεση:** Γνωστές οι συναρτήσεις στο δυναμικό μοντέλο ( $D, C, g$ )





# Μη Γραμμικός Έλεγχος στον (Καρτεσιανό) Χώρο Εργασίας



## Δυναμική ρομποτικού χειριστή (1)

Δυναμικό μοντέλο ρομποτικού χειριστή (υπενθύμιση):

$$\mathbf{D}(q) \cdot \ddot{q} + \mathbf{h}(q, \dot{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (\Delta 1)$$

(στο χώρο των γενικευμένων μεταβλητών  $q_i$  των αρθρώσεων)

όπου **D**: μήτρα αδρανείας ρομπότ

**h**: όροι Coriolis και φυγοκέντρου δυνάμεως

**τ**: ροπές (γενικευμένες μεταβλητές δράσης) στις αρθρώσεις

και **J**: Ιακωβιανή μήτρα του ρομπότ

Μοντέλο *Lagrange* :  $\tau_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_i} + \frac{\partial P}{\partial q_i}$  *K*: κινητική ενέργεια  
*P*: δυναμική ενέργεια

Μοντέλο *Newton-Euler* : 
$$\begin{cases} \sum f_i = m_i \dot{v}_{ci} \\ \sum N_i = I_{ci} \dot{\omega}_i + \omega_i \times (I_{ci} \omega_i) \end{cases}$$



# Δυναμική ρομποτικού χειριστή (2)

Δυναμικό μοντέλο ρομποτικού χειριστή στο χώρο εργασίας (task-space):

$$\mathbf{D}^* \cdot \ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{h}^* = \mathbf{F}_a \quad (\Delta 2-\alpha)$$

όπου  $\mathbf{D}^*$ : μήτρα αδρανείας ρομπότ στο χώρο εργασίας

$\mathbf{h}^*$ : όροι Coriolis και φυγοκέντρου δυνάμεως στο χώρο εργασίας

$\mathbf{F}_a$ : ( $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T \mathbf{F}_a$ ) γενικευμένη δύναμη στο χώρο εργασίας οφειλόμενη στη δράση (έλεγχος) των επενεργητών του ρομπότ

Έχουμε:  $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{J} \cdot \dot{\mathbf{q}} \Rightarrow \ddot{\mathbf{p}} = \mathbf{J} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}} \cdot \dot{\mathbf{q}}$

και (Δ1):  $\mathbf{D} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h} = \mathbf{J}^T \mathbf{F}_a \Leftrightarrow \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}^{-1} \mathbf{h} = (\mathbf{D}^{-1} \mathbf{J}^T) \mathbf{F}_a$

$$\Leftrightarrow \mathbf{J} \ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{J} \mathbf{D}^{-1}) \mathbf{h} = (\mathbf{J} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{J}^T) \mathbf{F}_a$$

Επομένως τελικά:

και

$$\mathbf{D}^* = \mathbf{Q}^{-1} \text{ με } \mathbf{Q} = (\mathbf{J} \cdot \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{J}^T) \quad (\Delta 2-\beta)$$

$$\mathbf{h}^* = (\mathbf{D}^* \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{D}^{-1}) \mathbf{h} - \mathbf{D}^* \cdot \dot{\mathbf{J}} \cdot \dot{\mathbf{q}}$$



# Δυναμικός έλεγχος στο χώρο εργασίας του ρομποτικού χειριστή (1)

Επιθυμητή δυναμική συμπεριφορά (κλειστού βρόχου) ρομποτικού χειριστή στο χώρο εργασίας (γραμμική δυναμική σφάλματος)

$$(\ddot{\mathbf{p}}_d - \ddot{\mathbf{p}}) + \mathbf{K}_D (\dot{\mathbf{p}}_d - \dot{\mathbf{p}}) + \mathbf{K}_P (\mathbf{p}_d - \mathbf{p}) = \mathbf{0} \quad (\text{E1})$$

Δυναμική εξίσωση ρομποτικού χειριστή στο χώρο εργασίας (Δ2-α):

$$\mathbf{D}^* \cdot \ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{h}^* = \mathbf{F}_a$$

Δυναμικός ελεγκτής (βάσει μοντέλου) στον Καρτεσιανό χώρο εργασίας  
 βασισμένος στη μεθοδολογία ελέγχου υπολογιζόμενης ροπής (computed-torque control)

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{F}_a \quad (\text{E2}) \quad (\mathbf{u} = \ddot{\mathbf{p}} : \text{εξίσωση κλειστού βρόχου})$$

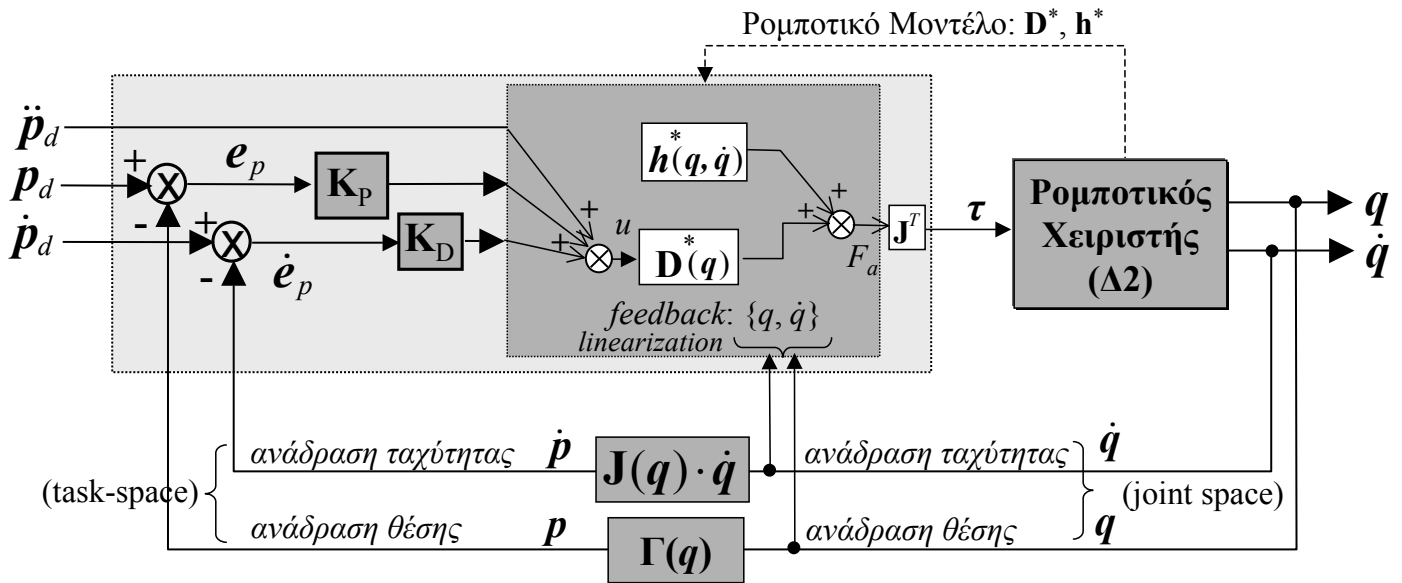
$$\mathbf{F}_a = \mathbf{D}^* \cdot \mathbf{u} + \mathbf{h}^*$$

με το σήμα ελέγχου  $\mathbf{u}$  να δίνεται από τη σχέση (ώστε στο κλειστό βρόχο να έχουμε την (E1))

$$\mathbf{u} = \ddot{\mathbf{p}}_d + \underbrace{\mathbf{K}_D (\dot{\mathbf{p}}_d - \dot{\mathbf{p}})}_{\text{σφάλμα ταχύτητας}} + \underbrace{\mathbf{K}_P (\mathbf{p}_d - \mathbf{p})}_{\text{σφάλμα θέσης}} \quad (\text{E3})$$



# Δυναμικός έλεγχος στο χώρο εργασίας του ρομποτικού χειριστή (2)



Διάγραμμα βαθμίδων (block-diagram) μη γραμμικού ρομποτικού ελεγκτή τροχιάς στο χώρο εργασίας (στη βάση της μεθόδου υπολογιζόμενης ροπής)

