

# Ρομποτικά Συστήματα Ελέγχου: Διαφορική Κινηματική Ανάλυση

Κων/νος Τζαφέστας

Τομέας Σημάτων, Ελέγχου & Ρομποτικής  
Σχολή Ηλεκτρ. Μηχ/κών & Μηχ/κών Υπολ., Ε.Μ.Π.

Τηλ.: (210) 772-3687 (Κτήριο Ηλεκτρ., Γραφείο 21.11)

E-mail: [ktzaf@cs.ntua.gr](mailto:ktzaf@cs.ntua.gr)

Web: <http://www.softlab.ntua.gr/~ktzaf/>



# Διαφορική Κινηματική Ανάλυση Ρομποτικών Χειριστών

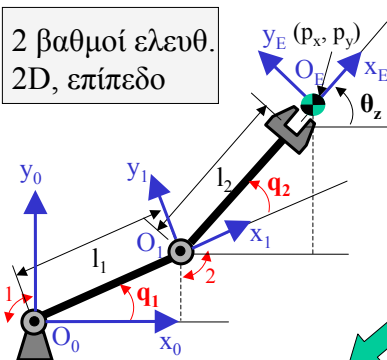


# Διαφορική Κινηματική Ανάλυση

- Ορθή διαφορική κινηματική ανάλυση
  - Γενικευμένες ταχύτητες αρθρώσεων  $\{\dot{\mathbf{q}}_i\}$   $\rightarrow$   $\rightarrow$  Εύρεση ταχύτητας ( $\underline{\mathbf{v}}$ ,  $\underline{\boldsymbol{\omega}}$ ) (γραμμική/γωνιακή) τελικού στοιχείου δράσης ρομπότ
  - Μετασχηματισμός από το χώρο αρθρώσεων στο χώρο δράσης (εργασίας)  $\Rightarrow$  *proprioception*
- Ανάστροφη διαφορική κινηματική ανάλυση
  - Ταχύτητα τελικού στοιχείου δράσης ( $\underline{\mathbf{v}}$ ,  $\underline{\boldsymbol{\omega}}$ )  $\rightarrow$   $\rightarrow$  Εύρεση  $\{\dot{\mathbf{q}}_i\}$   $\Rightarrow$  *Σχεδιασμός δρόμου ρομπότ*



## Διαφορικές κινηματικές ρομποτικές εξισώσεις: Παράδειγμα (1)



2 βαθμοί ελευθ.  
2D, επίπεδο

Ορθό Κινηματικό μοντέλο:  
(2 βαθμοί ελευθερίας:  $q_1$  και  $q_2$ )

**Δεδομένα:** «Ταχύτητες» αρθρώσεων  $\dot{q}_1, \dot{q}_2$

**Εύρεση:** Ταχύτητα (γραμμική/γωνιακή) τελικού στοιχείου δράσης  $[\dot{p}_x, \dot{p}_y, \dot{\theta}_z]^T$

$$\begin{aligned} p_x &= l_1 \cdot \cos(q_1) + l_2 \cdot \cos(q_1 + q_2) \\ p_y &= l_1 \cdot \sin(q_1) + l_2 \cdot \sin(q_1 + q_2) \\ \theta_z &= q_1 + q_2 \end{aligned}$$

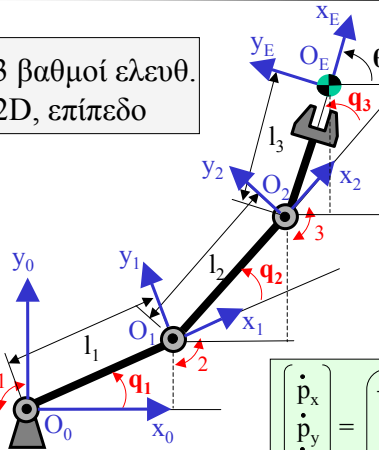
$$\begin{aligned} \dot{p}_x &= (dp_x/dt) = -\dot{q}_1 \cdot (l_1 s_1 + l_2 s_{12}) - \dot{q}_2 \cdot l_2 \cdot s_{12} \\ \dot{p}_y &= (dp_y/dt) = \dot{q}_1 \cdot (l_1 c_1 + l_2 c_{12}) + \dot{q}_2 \cdot l_2 \cdot c_{12} \\ \dot{\theta}_z &= \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{\theta}_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -(l_1 s_1 + l_2 s_{12}) & -l_2 \cdot s_{12} \\ (l_1 c_1 + l_2 c_{12}) & l_2 \cdot c_{12} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{J(q_1, q_2)} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$



# Ορθή διαφορική κινηματική ανάλυση: Παράδειγμα (2)

3 βαθμοί ελευθ.  
2D, επίπεδο



Κινηματική μοντέλο:

**Δεδομένα:** «Ταχύτητες» αρθρώσεων  $q_1, q_2, q_3$

**Εύρεση:** Ταχύτητα (γραμμική/γωνιακή) τελικού στοιχείου δράσης  $[p_x, p_y, \omega_z]^T$

$$\begin{aligned} p_x &= l_1 \cdot c_1 + l_2 \cdot c_{12} + l_3 \cdot c_{123} \\ p_y &= l_1 \cdot s_1 + l_2 \cdot s_{12} + l_3 \cdot s_{123} \\ \theta_z &= q_1 + q_2 + q_3 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{\theta}_z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -(l_1 s_1 + l_2 s_{12} + l_3 s_{123}) & -(l_2 s_{12} + l_3 s_{123}) & -l_3 s_{123} \\ (l_1 c_1 + l_2 c_{12} + l_3 c_{123}) & (l_2 c_{12} + l_3 c_{123}) & l_3 c_{12} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{J}(q_1, q_2, q_3)} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix}$$



## Διαφορική Κινηματική: Ιακωβιανή Μήτρα Ρομποτικού Χειριστή

Έστω:  $\mathbf{p}(q_1, q_2, q_3) = [p_x(q_1, q_2, q_3), p_y(q_1, q_2, q_3), \theta_z(q_1, q_2, q_3)]^T \Rightarrow$

$$\left\{ \begin{aligned} dp_x &= \frac{\partial p_x(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial p_x(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial p_x(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_3} dq_3 \\ dp_y &= \frac{\partial p_y(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial p_y(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial p_y(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_3} dq_3 \\ d\theta_z &= \frac{\partial \theta_z(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \theta_z(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \theta_z(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_3} dq_3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$d\mathbf{p} = \begin{bmatrix} dp_x \\ dp_y \\ d\theta_z \end{bmatrix} = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{q}$$

όπου  $d\mathbf{q} = \begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ dq_3 \end{bmatrix}$  και

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial p_x}{\partial q_1} & \frac{\partial p_x}{\partial q_2} & \frac{\partial p_x}{\partial q_3} \\ \frac{\partial p_y}{\partial q_1} & \frac{\partial p_y}{\partial q_2} & \frac{\partial p_y}{\partial q_3} \\ \frac{\partial \theta_z}{\partial q_1} & \frac{\partial \theta_z}{\partial q_2} & \frac{\partial \theta_z}{\partial q_3} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Ιακωβιανή} \\ \text{Μήτρα} \\ \text{(Jacobian)} \end{array}$$



# Μεταχηματισμοί απειροστών περιστροφών

Μήτρα απειροστής περιστροφής ( $d\theta_x$  γύρω από τον άξονα  $x$ ):

$$R_x(d\theta_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(d\theta_x) & -\sin(d\theta_x) \\ 0 & \sin(d\theta_x) & \cos(d\theta_x) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -d\theta_x \\ 0 & d\theta_x & 1 \end{bmatrix}$$

Διάνυσμα  
απειροστής  
στροφής

$$d\theta = \begin{bmatrix} d\theta_x \\ d\theta_y \\ d\theta_z \end{bmatrix}$$

Αντίστοιχα:

$$R_y(d\theta_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -d\theta_y & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_z(d\theta_z) = \begin{bmatrix} 1 & -d\theta_z & 0 \\ d\theta_z & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ισχύει:

$$R(d\theta_x, d\theta_y, d\theta_z) = R_x(d\theta_x)R_y(d\theta_y)R_z(d\theta_z) = \begin{bmatrix} 1 & -d\theta_z & d\theta_y \\ d\theta_z & 1 & -d\theta_x \\ -d\theta_y & d\theta_x & 1 \end{bmatrix}$$

και:

$$\begin{aligned} R(d\theta_x, d\theta_y, d\theta_z)R(d\theta'_x, d\theta'_y, d\theta'_z) &= \begin{bmatrix} 1 & -(d\theta_z + d\theta'_z) & (d\theta_y + d\theta'_y) \\ (d\theta_z + d\theta'_z) & 1 & -(d\theta_x + d\theta'_x) \\ -(d\theta_y + d\theta'_y) & (d\theta_x + d\theta'_x) & 1 \end{bmatrix} \\ &= R(d\theta_x + d\theta'_x, d\theta_y + d\theta'_y, d\theta_z + d\theta'_z) \end{aligned}$$



# Υπολογισμός Ιακωβιανής Μήτρας (1)

Εστω:  $d\mathbf{p} = \begin{bmatrix} d\mathbf{r}_E \\ d\theta_E \end{bmatrix}$  το  $(6 \times 1)$  διάνυσμα απειροστής μετατόπισης (μεταφοράς  $d\mathbf{r}_E$  και στροφής  $d\theta_E$ ) του τελικού στοιχείου δράσης E

$\Rightarrow \dot{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_E \\ \boldsymbol{\omega}_E \end{bmatrix}$  όπου  $\mathbf{v}_E, \boldsymbol{\omega}_E$ : γραμμική και γωνιακή ταχύτητα του τελικού στοιχείου δράσης E

Διαφορικό κινηματικό μοντέλο:  $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{J} \cdot \dot{\mathbf{q}}$  όπου  $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n]^T$ :  $(n \times 1)$  διάνυσμα των ταχυτήτων των αρθρώσεων

$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{L_1} & \mathbf{J}_{L_2} & \dots & \mathbf{J}_{L_n} \\ \mathbf{J}_{A_1} & \mathbf{J}_{A_2} & \dots & \mathbf{J}_{A_n} \end{bmatrix}$  όπου  $\mathbf{J}_{L_i}, \mathbf{J}_{A_i}$ :  $(3 \times 1)$  διανύσματα στήλης  $\rightarrow$  «συνεισφορά» του  $\dot{q}_i$  (ταχύτητα άρθρωσης  $i$ ) στη γραμμική και γωνιακή ταχύτητα του τελικού στοιχείου δράσης

Ιακωβιανή Μήτρα  $(6 \times n)$

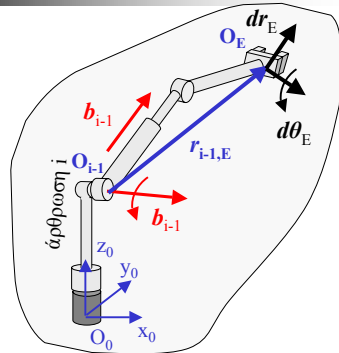
δηλαδή: 
$$\begin{cases} \mathbf{v}_E = \mathbf{J}_{L_1} \cdot \dot{q}_1 + \mathbf{J}_{L_2} \cdot \dot{q}_2 + \dots + \mathbf{J}_{L_n} \cdot \dot{q}_n \\ \boldsymbol{\omega}_E = \mathbf{J}_{A_1} \cdot \dot{q}_1 + \mathbf{J}_{A_2} \cdot \dot{q}_2 + \dots + \mathbf{J}_{A_n} \cdot \dot{q}_n \end{cases}$$



# Υπολογισμός Ιακωβιανής Μήτρας (2)

✓ 
$$\begin{bmatrix} J_{L_i} \\ J_{A_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{i-1} \times \mathbf{r}_{i-1,E} \\ \mathbf{b}_{i-1} \end{bmatrix} : \text{για στροφική άρθρωση}$$

όπου  $\mathbf{b}_{i-1}$ : ο άξονας της άρθρωσης  $i$   
 $\mathbf{r}_{i-1,E}$ : διάνυσμα  $O_{i-1} \rightarrow O_E$



✓ 
$$\begin{bmatrix} J_{L_i} \\ J_{A_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{i-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} : \text{για πρισματική άρθρωση}$$

▪  $\mathbf{b}_{i-1} = \mathbf{R}_{i-1}^0(q_1, \dots, q_{i-1}) \cdot \underline{\mathbf{b}}$

όπου:  $\underline{\mathbf{b}} = [0, 0, 1]^T$   
 (στη μεθοδολογία Denavit-Hartenberg)

▪  $\mathbf{r}_{i-1,E} = \mathbf{A}_n^0(q_1, \dots, q_n) \cdot \underline{\mathbf{r}} - \mathbf{A}_{i-1}^0(q_1, \dots, q_{i-1}) \cdot \underline{\mathbf{r}}$

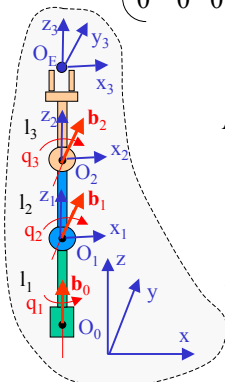
όπου:  $\underline{\mathbf{r}} = [0, 0, 0, 1]^T$

$$\begin{cases} \mathbf{A}_2^0(q_1, q_2) = \mathbf{A}_1^0(q_1) \cdot \mathbf{A}_2^1(q_2) \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{i-1}^0(q_1, \dots, q_{i-1}) = \mathbf{A}_{i-2}^0(q_1, \dots, q_{i-2}) \cdot \mathbf{A}_{i-1}^{i-2}(q_{i-1}) \\ \vdots \\ \mathbf{A}_n^0(q_1, \dots, q_n) = \mathbf{A}_{n-1}^0(q_1, \dots, q_{n-1}) \cdot \mathbf{A}_n^{n-1}(q_n) \end{cases}$$



# Υπολογισμός Ιακωβιανής Μήτρας – Παράδειγμα: Ρομποτικός Βραχίονας 3-R

$$\mathbf{A}_1^0(q_1) = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2^1(q_2) = \begin{pmatrix} c_2 & 0 & s_2 & l_2 s_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_2 & 0 & c_2 & l_2 c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_3^2(q_3) = \begin{pmatrix} c_3 & 0 & s_3 & l_3 s_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_3 & 0 & c_3 & l_3 c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{A}_2^0(q_1, q_2) = \mathbf{A}_1^0(q_1) \cdot \mathbf{A}_2^1(q_2) = \begin{pmatrix} c_1 c_2 & -s_1 & c_1 s_2 & l_2 c_1 s_2 \\ s_1 c_2 & c_1 & s_1 s_2 & l_2 s_1 s_2 \\ -s_2 & 0 & c_2 & l_1 + l_2 c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_3^0(\mathbf{q}) = \mathbf{A}_2^0(q_1, q_2) \cdot \mathbf{A}_3^2(q_3) = \begin{pmatrix} c_1 c_{23} & -s_1 & c_1 s_{23} & c_1 (l_2 s_2 + l_3 s_{23}) \\ s_1 c_{23} & c_1 & s_1 s_{23} & s_1 (l_2 s_2 + l_3 s_{23}) \\ -s_{23} & 0 & c_{23} & l_1 + l_2 c_2 + l_3 c_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



## Υπολογισμός Ιακωβιανής Μήτρας Ρομποτικού Βραχίονα 3-R (συνέχεια) (1)

$$\bullet \mathbf{b}_0 = [0 \ 0 \ 1]^T \quad \bullet \mathbf{b}_1 = [-s_1 \ c_1 \ 0]^T \quad \bullet \mathbf{b}_2 = [-s_1 \ c_1 \ 0]^T$$

$$\bullet \mathbf{r}_{0,E} = \begin{bmatrix} c_1(l_2s_2 + l_3s_{23}) \\ s_1(l_2s_2 + l_3s_{23}) \\ l_1 + (l_2c_2 + l_3c_{23}) \end{bmatrix} \quad \bullet \mathbf{r}_{1,E} = \begin{bmatrix} c_1(l_2s_2 + l_3s_{23}) \\ s_1(l_2s_2 + l_3s_{23}) \\ (l_2c_2 + l_3c_{23}) \end{bmatrix} \quad \bullet \mathbf{r}_{2,E} = \begin{bmatrix} (l_3c_1s_{23}) \\ (l_3s_1s_{23}) \\ (l_3c_{23}) \end{bmatrix}$$

Υπενθύμιση : ✓  $\begin{bmatrix} \mathbf{J}_{L_i} \\ \mathbf{J}_{A_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{i-1} \times \mathbf{r}_{i-1,E} \\ \mathbf{b}_{i-1} \end{bmatrix}$  : για στροφική άρθρωση  $i$

✓  $\begin{bmatrix} \mathbf{J}_{L_i} \\ \mathbf{J}_{A_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{i-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$  : για πρισματική άρθρωση



## Υπολογισμός Ιακωβιανής Μήτρας Ρομποτικού Βραχίονα 3-R (συνέχεια) (2)

$$\bullet \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{L_1} \\ \mathbf{J}_{A_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_0 \times \mathbf{r}_{0,E} \\ \mathbf{b}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_1(l_2s_2 + l_3s_{23}) \\ s_1(l_2s_2 + l_3s_{23}) \\ l_1 + (l_2c_2 + l_3c_{23}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_1(l_2s_2 + l_3s_{23}) \\ c_1(l_2s_2 + l_3s_{23}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bullet \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{A_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bullet \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{L_2} \\ \mathbf{J}_{A_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \times \mathbf{r}_{1,E} \\ \mathbf{b}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_1(l_2s_2 + l_3s_{23}) \\ s_1(l_2s_2 + l_3s_{23}) \\ (l_2c_2 + l_3c_{23}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1(l_2c_2 + l_3c_{23}) \\ s_1(l_2c_2 + l_3c_{23}) \\ -(l_2s_2 + l_3s_{23}) \end{bmatrix} \quad \bullet \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{A_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bullet \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{L_3} \\ \mathbf{J}_{A_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_2 \times \mathbf{r}_{2,E} \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} (l_3c_1s_{23}) \\ (l_3s_1s_{23}) \\ (l_3c_{23}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (l_3c_1c_{23}) \\ (l_3s_1c_{23}) \\ -(l_3s_{23}) \end{bmatrix} \quad \bullet \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{A_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$



## Υπολογισμός Ιακωβιανής Μήτρας Ρομποτικού Βραχίονα 3-R (συνέχεια) (3)

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -s_1(l_2s_2 + l_3s_{23}) & c_1(l_2c_2 + l_3c_{23}) & (l_3c_1c_{23}) \\ c_1(l_2s_2 + l_3s_{23}) & s_1(l_2c_2 + l_3c_{23}) & (l_3s_1c_{23}) \\ 0 & -(l_2s_2 + l_3s_{23}) & -(l_3s_{23}) \\ \hline 0 & -s_1 & -s_1 \\ 0 & c_1 & c_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



## Αντίστροφη Διαφορική Κινηματική

Δεδομένης επιθυμητής ταχύτητας τελικού στοιχείου δράσης  
( $\mathbf{v}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$ )  $\rightarrow$  Εύρεση  $\{\dot{\mathbf{q}}_i\}$  ( $i=1, \dots, n$ )

$$\dot{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_E \\ \boldsymbol{\omega}_E \end{bmatrix} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad : \text{ ευθύ διαφορικό κινηματικό μοντέλο}$$

Εάν η  $\mathbf{J}(\mathbf{q})$  είναι αντιστρέψιμη, δηλαδή:  $\det(\mathbf{J}(\mathbf{q})) \neq 0$ , τότε :

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{p}}$$

$\dot{\mathbf{q}}$  : ταχύτητες αρθρώσεων για να επιτύχουμε επιθυμητή ταχύτητα  $\dot{\mathbf{p}}$   
τελικού στοιχείου δράσης

Εκφυλισμός διάταξης ρομποτικού βραχίονα.

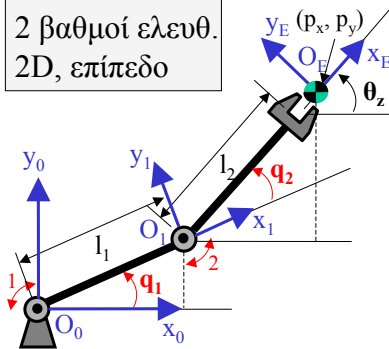
Ιδιόμορφες διατάξεις (*singular configurations*)  $\mathbf{q}$  για τις οποίες:  $\det(\mathbf{J}(\mathbf{q})) = 0$

$\rightarrow$  Υπάρχει τουλάχιστον μία διεύθυνση κατά την οποία το ρομπότ δεν μπορεί να κινηθεί



# Αντίστροφη Διαφορική Κινηματική: Παράδειγμα (1)

2 βαθμοί ελευθ.  
2D, επίπεδο



Ευθύ Κινηματικό μοντέλο:  
(2 βαθμοί ελευθερίας:  $q_1$  και  $q_2$ )

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(l_1 s_1 + l_2 s_{12}) & -l_2 s_{12} \\ (l_1 c_1 + l_2 c_{12}) & l_2 c_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{J}(q_1, q_2)$

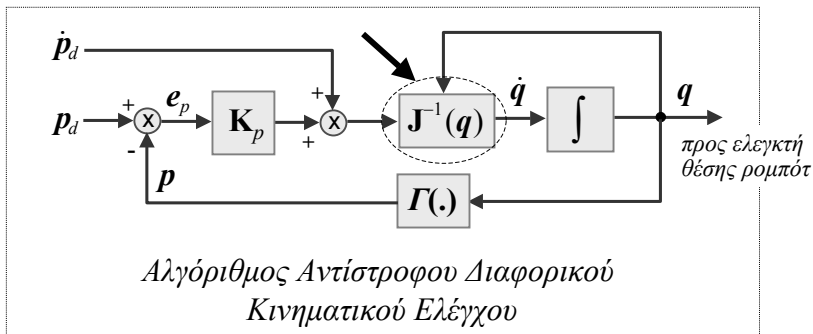
- ➔  $\det(\mathbf{J}(q_1, q_2)) = l_1 l_2 \sin(q_2)$
- ➔  $\det(\mathbf{J}(q_1, q_2)) = 0$ , όταν  $\sin(q_2) = 0$ , δηλαδή όταν  $q_2 = 0$  ή  $\pi$  (ιδιόμορφες διατάξεις)

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{l_1 l_2 s_2} \begin{bmatrix} l_2 c_{12} & l_2 s_{12} \\ -(l_1 c_1 + l_2 c_{12}) & -(l_1 s_1 + l_2 s_{12}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} : \text{αντίστροφο διαφορικό κινηματικό μοντέλο}$$

$\mathbf{J}^{-1}(q_1, q_2)$



# Κινηματικός Έλεγχος Ρομπότ (1)



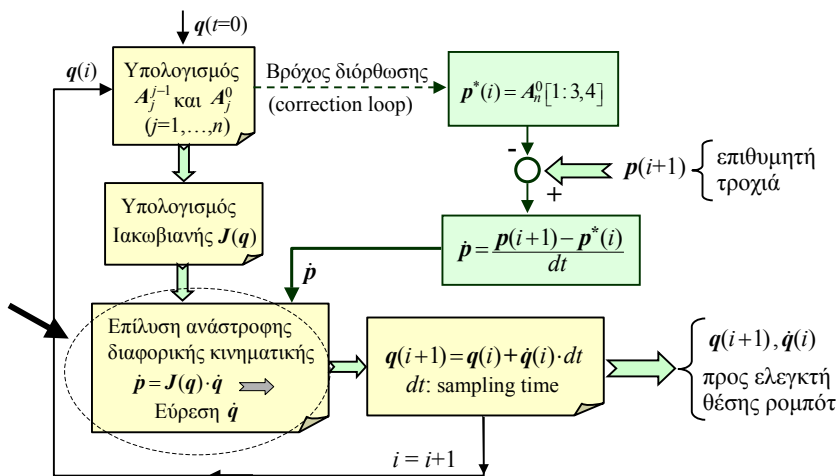
$$\dot{q} = \mathbf{J}^{-1}(q) \cdot (\dot{p}_d + \mathbf{K}_p \cdot e_p)$$

$$\Rightarrow \dot{e}_p + \mathbf{K}_p \cdot e_p = 0$$





## Κινηματικός Έλεγχος Ρομπότ (2)



Σχήμα ελέγχου επιλυμένης ταχύτητας (Resolved motion-rate control)



## Ρομπότ με πλεονάζοντες βαθμούς ελευθερίας: Εισαγωγή

### Βασικές αρχές

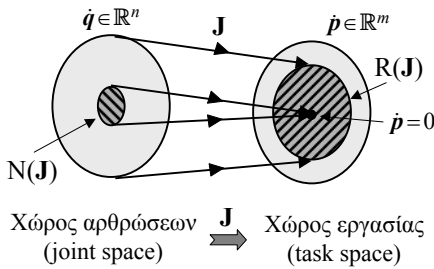
- 6 β.ε. για θέση/προσανατολισμό στο χώρο
- Πλεονάζοντες β.ε. εισάγουν τη δυνατότητα *απειρίας εφικτών κινήσεων* στις αρθρώσεις για δοσμένη επιθυμητή κίνηση στο τελικό στοιχείο δράσης  
 $\rightarrow$  μηδενικός χώρος ρομποτικών αρθρώσεων (*null space*)  
 $\rightarrow$  πλεονάζοντες β.ε. για ικανοποίηση επιπρόσθετων κινηματικών περιορισμών (βελτιστοίηση κριτηρίων για επιλογή κατάλληλης κίνησης στους πλεονάζοντες β.ε.)



Παράδειγμα ρομποτικού βραχίονα με πλεονάζοντες β.ε. (DLR lightweight 7dof robot)



# Ρομπότ με πλεονάζοντες βαθμούς ελευθερίας: Κινηματική (1)



$R(\mathbf{J})$ : range space  
 (σύνολο δυνατών ταχυτήτων στο χώρο εργασίας)

$N(\mathbf{J})$ : null space  
 (μηδενικός χώρος)

$$\dot{q} \in N(\mathbf{J}) \Rightarrow \mathbf{J}(\dot{q}) = 0$$

Όταν  $n > m$ , και  $\text{rank}(\mathbf{J}) = m$  (δηλαδή,  $\mathbf{J}$ : πλήρους τάξης)  $\rightarrow$  τότε έχουμε  $(n-m)$  πλεονάζοντες (redundant) βαθμούς ελευθερίας

$$\dim N(\mathbf{J}) = n - m \quad \dim N(\mathbf{J}) + \dim R(\mathbf{J}) = n$$



# Ρομπότ με πλεονάζοντες βαθμούς ελευθερίας: Κινηματική (2)

Βέλτιστη λύση της διαφορικής κινηματικής εξίσωσης για πλεονάζοντα ρομπότ (redundant robots)

Διαφορική κινηματική εξίσωση:  $\mathbf{J} \cdot \dot{q} = \dot{p}$        $\mathbf{J}: m \times n, \text{rank}(\mathbf{J}) = m$

Ελαχιστοποίηση συνάρτησης κόστους:  $F(\dot{q}) = (1/2) \|\dot{q}\|^2 = (1/2) \dot{q}^T \dot{q}$

Μέθοδος Lagrange:  $F'(\dot{q}, \lambda) = (1/2) \dot{q}^T \cdot \dot{q} - \lambda^T \cdot (\mathbf{J}\dot{q} - \dot{p}) \rightarrow \min$

$$\left. \begin{array}{l} \nabla_{\dot{q}} F'(\dot{q}, \lambda) = 0 \\ \nabla_{\lambda} F'(\dot{q}, \lambda) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{q} - \mathbf{J}^T \lambda = 0 \\ \mathbf{J}\dot{q} - \dot{p} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{q} = \mathbf{J}^T \lambda \\ \dot{p} = \mathbf{J}\dot{q} = (\mathbf{J}\mathbf{J}^T) \lambda \end{array} \right.$$

$$\dot{q} = \mathbf{J}^+ \cdot \dot{p}$$

όπου  $\mathbf{J}^+$ : ψευδοαντίστροφη της Ιακωβιανής

$$\mathbf{J}^+ = \mathbf{J}^T \cdot (\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^T)^{-1} \quad (\text{Moore-Penrose pseudoinverse})$$



# Ρομπότ με πλεονάζοντες βαθμούς ελευθερίας: Κινηματική (3)

Γενική βέλτιστη λύση της διαφορικής κινηματικής εξίσωσης για πλεονάζοντα ρομπότ (redundant robots)

Διαφορική κινηματική εξίσωση:  $J \cdot \dot{q} = \dot{p}$   $J: m \times n$ ,  $\text{rank}(J) = m$

Ελαχιστοποίηση συνάρτησης κόστους:  $F(\dot{q}) = \frac{1}{2} \cdot (\dot{q} - k)^T \cdot Q \cdot (\dot{q} - k)$   
( $Q$ : symmetric, positive definite  $n \times n$ ,  $k \in \mathbb{R}^n$ )

Μέθοδος Lagrange:  $F'(\dot{q}, \lambda) = \frac{1}{2} \cdot (\dot{q} - k)^T \cdot Q \cdot (\dot{q} - k) - \lambda^T \cdot (J\dot{q} - \dot{p}) \rightarrow \min$

$$\left. \begin{array}{l} \nabla_{\dot{q}} F'(\dot{q}, \lambda) = \mathbf{0} \\ \nabla_{\lambda} F'(\dot{q}, \lambda) = \mathbf{0} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Q(\dot{q} - k) - J^T \lambda = \mathbf{0} \\ J\dot{q} - \dot{p} = \mathbf{0} \end{array} \right.$$

$$\dot{q} = J_Q^\# \cdot \dot{p} + (I_n - J_Q^\# \cdot J) \cdot k$$

( $I_n$ : μοναδιαία μήτρα  $n \times n$ )  $\in N(J)$

όπου  $J_Q^\#$  weighted pseudoinverse of the Jacobian matrix

$$J_Q^\# = Q^{-1} \cdot J^T \cdot (J \cdot Q^{-1} \cdot J^T)^{-1}$$



## Έλεγχος Πλεοναζόντων Ρομπότ

### Μεθοδολογία Διάσπασης Ρομποτικής Εργασίας

- Διάσπαση σύνθετων ρομποτικών εργασιών σε *υποεργασίες με σειρά προτεραιότητας* (task-decomposition) (π.χ. έλεγχος θέσης ή δύναμης, αποφυγή εμποδίων ή ιδιομορφιών κλπ.)
- Περιγραφή ρομποτικών υποεργασιών με βάση:
  - **επιθυμητή τροχιά** του ρομπότ στο χώρο εργασίας (ή γενικότερα επιθυμητή «συμπεριφορά», π.χ. μηχανική αντίσταση, κλπ.)
  - **κριτήρια** στο χώρο διάταξης των αρθρώσεων (configuration space)  $\rightarrow$  βελτιστοποίηση



# Μεθοδολογία Διάσπασης Εργασίας Πλεοναζόντων Ρομπότ (1)

**Βασικές Σχέσεις** (διάσπαση σε δύο ρομποτικές υπο-εργασίες)

Έστω  $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]$  : διάταξη των αρθρώσεων (configuration)

• Πρώτη υπο-εργασία:  $p_1 = f_1(q)$ ,  $p_1$ :  $m_1 \times 1$  διάνυσμα  
→ επιθυμητή τροχιά  $p_{1d}(t)$

• Δεύτερη υπο-εργασία:

Περίπτωση - 1:  $p_2 = f_2(q)$ ,  $p_2$ :  $m_2 \times 1$  διάνυσμα  
→ επιθυμητή τροχιά  $p_{2d}(t)$

Περίπτωση - 2: Συνάρτηση κριτηρίου:  $c = V(q)$   
→ μεγιστοποίηση  
⇔ πρόβλημα βελτίστου ελέγχου



# Μεθοδολογία Διάσπασης Εργασίας Πλεοναζόντων Ρομπότ (2)

• Πρώτη υπο-εργασία:  $\dot{p}_1 = J_1 \cdot \dot{q}$  ( $p_1 = f_1(q) = [f_{11}(q) \ f_{12}(q) \dots \ f_{1m_1}(q)]^T$ )

(T1)

$$\text{όπου: } J_1 = \frac{\partial f_1}{\partial q} \Rightarrow J_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{11}}{\partial q_1} & \frac{\partial f_{11}}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_{11}}{\partial q_n} \\ \frac{\partial f_{12}}{\partial q_1} & \frac{\partial f_{12}}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_{12}}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{1m_1}}{\partial q_1} & \frac{\partial f_{1m_1}}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_{1m_1}}{\partial q_n} \end{bmatrix}$$

$$\dot{q} = \underbrace{J_1^+ \dot{p}_{1d}}_{\text{Εκτέλεση 1ης υποεργασίας}} + \underbrace{(I_n - J_1^+ J_1) k_1}_{\substack{\in N(J_1) \\ \text{μηδενικός χώρος} \\ \text{«εξωτερικές κινήσεις»}}} \quad (1), \text{ όπου } k_1: \text{ τυχαίο διάνυσμα } n \times 1$$

$$J_1^+ = J_1^T \cdot (J_1 \cdot J_1^T)^{-1} : \text{ψευδοαντίστροφη της μήτρας } J_1$$

$$\left. \begin{array}{l} J_1: m_1 \times n \\ J_1^+: n \times m_1 \end{array} \right\} J_1 \cdot J_1^+ = I_{m_1}$$



# Μεθοδολογία Διάσπασης Εργασίας Πλεοναζόντων Ρομπότ (3)

## • Δεύτερη υπο-εργασία

- 1η Περίπτωση :  $\dot{p}_2 = J_2 \cdot \dot{q}$  ( $p_2 = f_2(q) = [f_{21}(q) f_{22}(q) \dots f_{2m_2}(q)]^T$ )  
 (T2a)  $\hookrightarrow \dot{p}_{2d}$  όπου:  $J_2 = \partial f_2 / \partial q$  ( $m_2 \times n$ )

(1)  $\wedge$  (T2a)  $\Rightarrow \dot{p}_{2d} - J_2 J_1^+ \dot{p}_{1d} = J_2 (I_n - J_1^+ J_1) k_1$

Θέτουμε:  $\tilde{J}_2 = J_2 (I_n - J_1^+ J_1)$

$\Rightarrow k_1 = \tilde{J}_2^+ (\dot{p}_{2d} - J_2 J_1^+ \dot{p}_{1d}) + (I_n - \tilde{J}_2^+ \tilde{J}_2) k_2$  (2)  
 όπου  $k_2$ : τυχαίο διάνυσμα  $n \times 1$

Τελικά:  $\dot{q}_d = \underbrace{J_1^+ \dot{p}_{1d}}_{1\text{η υποεργασία}} + \underbrace{\tilde{J}_2^+ (\dot{p}_{2d} - J_2 J_1^+ \dot{p}_{1d})}_{2\text{η υποεργασία}} + \underbrace{(I_n - J_1^+ J_1 - \tilde{J}_2^+ \tilde{J}_2) k_2}_{\text{υπολείποντες πλεονάζοντες β.ε.}}$  (3)

{ Σημείωση: χρησιμοποιήθηκε η σχέση  $(I_n - J_1^+ J_1) \tilde{J}_2^+ = \tilde{J}_2^+$  }



# Μεθοδολογία Διάσπασης Εργασίας Πλεοναζόντων Ρομπότ (3β)

$\tilde{J}_2 = J_2 N_1$  (1) όπου  $N_1 = (I_n - J_1^+ J_1)$  Ισχύει  $N_1 \cdot N_1 = N_1$  (2α)

και  $(N_1)^T = N_1$  (2β)

**Πρόταση:** Για τις παραπάνω μήτρες ισχύει:

$(I_n - J_1^+ J_1) \tilde{J}_2^+ = \tilde{J}_2^+$  δηλαδή:  $\tilde{J}_2^+ = N_1 \cdot \tilde{J}_2^+$

**Απόδειξη:**

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{J}_2^+ \tilde{J}_2 \tilde{J}_2^+ = \tilde{J}_2^+ \iff (N_1 \cdot \tilde{J}_2^+) \tilde{J}_2 (N_1 \cdot \tilde{J}_2^+) \stackrel{(1) \wedge (2\alpha)}{=} N_1 \cdot \tilde{J}_2^+ \tilde{J}_2 \tilde{J}_2^+ = N_1 \cdot \tilde{J}_2^+ \\ \tilde{J}_2 \tilde{J}_2^+ \tilde{J}_2 = \tilde{J}_2 \quad \dots \\ (\tilde{J}_2^+ \tilde{J}_2)^T = \tilde{J}_2^+ \tilde{J}_2 \\ (\tilde{J}_2 \tilde{J}_2^+)^T = \tilde{J}_2 \tilde{J}_2^+ \end{array} \right.$$



# Μεθοδολογία Διάσπασης Εργασίας Πλεοναζόντων Ρομπότ (4)

- Δεύτερη υπο-εργασία / 1η Περίπτωση (συνέχεια)

Απλοποιημένη περίπτωση (2η υποεργασία εκφρασμένη απ'ευθείας ως επιθυμητή κίνηση στο χώρο των ρομποτικών αρθρώσεων)

$$\text{Εάν } \mathbf{p}_2 = \mathbf{q}, \text{ δηλαδή } \mathbf{J}_2 = \mathbf{I}, \text{ τότε: } \tilde{\mathbf{J}}_2 = (\mathbf{I}_n - \mathbf{J}_1^+ \mathbf{J}_1)$$

$$\text{οπότε: } \tilde{\mathbf{J}}_2^+ = (\mathbf{I}_n - \mathbf{J}_1^+ \mathbf{J}_1)^+ = (\mathbf{I}_n - \mathbf{J}_1^+ \mathbf{J}_1)$$

$$\text{Τελικά δηλαδή παίρνουμε: } \dot{\mathbf{q}}_d = \underbrace{\mathbf{J}_1^+ \dot{\mathbf{p}}_{1d}}_{\text{1η υποεργασία}} + \underbrace{(\mathbf{I}_n - \mathbf{J}_1^+ \mathbf{J}_1) \dot{\mathbf{p}}_{2d}}_{\text{2η υποεργασία}} \quad (4)$$

Αντί για  $\dot{\mathbf{p}}_{2d}$  στις σχέσεις (3) και (4), χρησιμοποιείται συχνά η σχέση:

$$\dot{\mathbf{p}}_{2d}^* = \dot{\mathbf{p}}_{2d} + \mathbf{H}_2(\mathbf{p}_{2d} - \mathbf{p}_2) \text{ οπότε η (4) π.χ. γράφεται τελικά:}$$

$$\dot{\mathbf{q}}_d = \mathbf{J}_1^+ \dot{\mathbf{p}}_{1d} + (\mathbf{I}_n - \mathbf{J}_1^+ \mathbf{J}_1) [\dot{\mathbf{p}}_{2d} + \mathbf{H}_2(\mathbf{p}_{2d} - \mathbf{p}_2)] \quad (4)'$$



# Μεθοδολογία Διάσπασης Εργασίας Πλεοναζόντων Ρομπότ (5)

- Δεύτερη υπο-εργασία

- 2η Περίπτωση : «Συνάρτηση κριτηρίου»  $c = V(\mathbf{q}) \rightarrow \max$   
(T2b)

$$\text{Έστω: } \mathbf{k}_1 = k_c \cdot \boldsymbol{\xi} \text{ όπου: } \boldsymbol{\xi} = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]^T \quad (\xi_j = \partial V / \partial q_j)$$

$k_c$  : θετική σταθερά

$$\boldsymbol{\xi} : \text{διάνυσμα κλίσης της συνάρτησης κριτηρίου } c=V(\mathbf{q}) \\ (\text{gradient vector } \boldsymbol{\xi} = \nabla_{\mathbf{q}} [V(\mathbf{q})] = \partial V(\mathbf{q}) / \partial \mathbf{q})$$

ορθογώνια προβολή του  $\mathbf{k}_1$  στο  $\mathcal{N}(\mathbf{J}_1)$

$$(1) \Rightarrow \dot{\mathbf{q}}_d = \underbrace{\mathbf{J}_1^+ \dot{\mathbf{p}}_{1d}}_{\text{1η υποεργασία}} + \underbrace{k_c (\mathbf{I}_n - \mathbf{J}_1^+ \mathbf{J}_1) \cdot \boldsymbol{\xi}}_{\text{2η υποεργασία}} \quad (5)$$

$$\text{Έχουμε: } \dot{c} = \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{J}_1^+ \dot{\mathbf{p}}_{1d} + \underbrace{\boldsymbol{\xi}^T \cdot (\mathbf{I}_n - \mathbf{J}_1^+ \mathbf{J}_1) \cdot \boldsymbol{\xi}}_{>0} \cdot k_c > 0 \Rightarrow c(\mathbf{q}) \uparrow$$



# Έλεγχος Πλεοναζόντων Ρομπότ

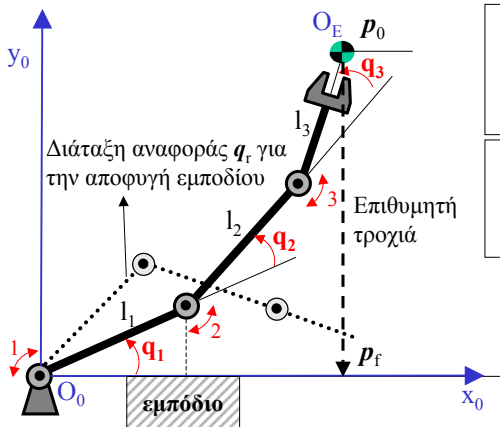
## Εφαρμογές – Παραδείγματα:

1. Αποφυγή Εμποδίων  
(obstacle avoidance)
2. Αποφυγή Ιδιόμορφων Διατάξεων  
(avoiding singularities)



## Έλεγχος Πλεοναζόντων Ρομπότ – Εφαρμογές: Αποφυγή Εμποδίων (1)

### Redundant Robot Manipulators: Avoiding Obstacles



- Υποεργασία 1:  
Εκτέλεση επιθυμητής τροχιάς  
 $p_{1d}(t) : p_0 (t=0) \rightarrow p_f (t=t_f)$

- Υποεργασία 2:  
Αποφυγή εμποδίου  
 $p_{2d}(t) = q_f$

Παράδειγμα:

$$l_1=1, l_2=1, l_3=0.3$$

$$q_0=[20^0, 30^0, 20^0]^T$$

$$p_0=[x_0, y_0]^T \rightarrow p_f=[x_0, 0]^T$$

$$q_f=[45^0, -70^0, 0^0]^T \quad (t_f=1)$$



# Έλεγχος Πλεοναζόντων Ρομπότ – Εφαρμογές: Αποφυγή Εμποδίων (2)

- Υποεργασία 1η ( $p_{1d}$ ): Εκτέλεση επιθυμητής τροχιάς  $p_0 (t=0) \rightarrow p_f (t=t_f)$

√ Ορθό Γεωμετρικό μοντέλο

$$\begin{cases} p_{1x} = l_1 \cdot c_1 + l_2 \cdot c_{12} + l_3 \cdot c_{123} \\ p_{1y} = l_1 \cdot s_1 + l_2 \cdot s_{12} + l_3 \cdot s_{123} \\ \theta = q_1 + q_2 + q_3 \end{cases}$$

όπου :

$$\begin{aligned} c1 &= \cos(q_1) \\ c12 &= \cos(q_1 + q_2) \\ c123 &= \cos(q_1 + q_2 + q_3) \\ s1 &= \sin(q_1) \\ s12 &= \sin(q_1 + q_2) \\ s123 &= \sin(q_1 + q_2 + q_3) \end{aligned}$$

√ Ορθό διαφορικό κινηματικό μοντέλο:

$$J_1 = \begin{bmatrix} -(l_1 s_1 + l_2 s_{12} + l_3 s_{123}) & -(l_2 s_{12} + l_3 s_{123}) & -l_3 s_{123} \\ (l_1 c_1 + l_2 c_{12} + l_3 c_{123}) & (l_2 c_{12} + l_3 c_{123}) & l_3 c_{123} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_{1x} \\ \dot{p}_{1y} \end{bmatrix} = J_1(q_1, q_2, q_3) \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}$$

Έστω π.χ. επιθυμητή τροχιά (1η υποεργασία):

$$p_{1d}(t) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 - (3-2t)t^2 y_0 \end{bmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

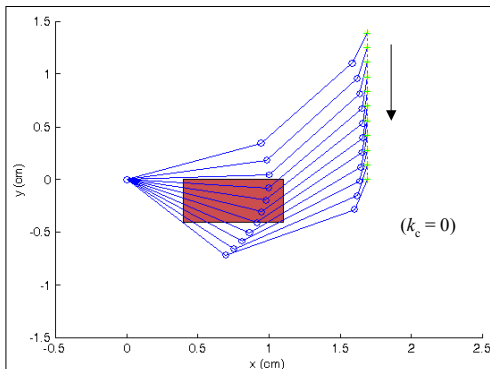
- Υποεργασία 2η:  $p_2 = q$  και  $p_{2d} = q_T$  (διάταξη αναφοράς)



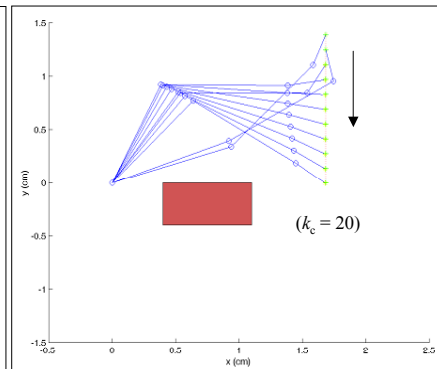
# Έλεγχος Πλεοναζόντων Ρομπότ – Εφαρμογές: Αποφυγή Εμποδίων (3)

➤ Παράδειγμα προσομοίωσης (3 β.ε. → τοποθέτηση στο επίπεδο)  
(εφαρμογή της παραπάνω σχέσης (4)')

$$\dot{q}_d = J_1^+ \dot{p}_{1d} + (I_n - J_1^+ J_1) H_2 (p_{2d} - p_2)$$



Χωρίς τον έλεγχο πλεοναζόντων β.ε. ( $H_2=0$ )



Με έλεγχο των πλεοναζόντων β.ε. ( $H_2=k_c I$ )





# Έλεγχος Πλεοναζόντων Ρομπότ – Εφαρμογές: Αποφυγή Ιδιομορφιών (1)

## ➔ Redundant Robot Manipulators: Avoiding Singularities

- Υποεργασία 1η ( $\mathbf{p}_{1d}$ ): Εκτέλεση επιθυμητής τροχιάς  $\mathbf{p}_0 (t=0) \rightarrow \mathbf{p}_f (t=t_f)$

$$\mathbf{J}_1 = \begin{pmatrix} -(l_1 s_1 + l_2 s_{12} + l_3 s_{123}) & -(l_2 s_{12} + l_3 s_{123}) & -l_3 s_{123} \\ (l_1 c_1 + l_2 c_{12} + l_3 c_{123}) & (l_2 c_{12} + l_3 c_{123}) & l_3 c_{123} \end{pmatrix} \quad \text{δηλ.: } \mathbf{J}_1 = \begin{pmatrix} \underline{J}_{11} \\ \underline{J}_{12} \end{pmatrix}$$

- Υποεργασία 2η: Μεγιστοποίηση συνάρτησης κριτηρίου  $c = V(\mathbf{q})$

$$c = V(\mathbf{q}) = \sqrt{\det(\mathbf{J}_1 \mathbf{J}_1^T)} : \text{δείκτης ικανότητας χειρισμού (manipulability)} \\ \text{(μέτρο «απόστασης» από ιδιόμορφες διατάξεις)}$$

$$\mathbf{J}_1: 2 \times 3 \Rightarrow \mathbf{J}_1 \mathbf{J}_1^T: 2 \times 2 \quad \text{και} \quad \det(\mathbf{J}_1 \mathbf{J}_1^T) = 0 \quad \text{στις ιδιόμορφες διατάξεις}$$



# Έλεγχος Πλεοναζόντων Ρομπότ – Εφαρμογές: Αποφυγή Ιδιομορφιών (2)

Επίλυση του προβλήματος αποφυγής ιδιόμορφων διατάξεων με έλεγχο των πλεοναζόντων β.ε.

➤ Εφαρμογή της παραπάνω σχέσης (5):  $\dot{\mathbf{q}}_d = \mathbf{J}_1^+ \dot{\mathbf{p}}_{1d} + k_c (\mathbf{I}_n - \mathbf{J}_1^+ \mathbf{J}_1) \cdot \boldsymbol{\xi}$

όπου:  $k_c$ : θετική σταθερά, και  $\boldsymbol{\xi} = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]^T$  ( $\boldsymbol{\xi} = \partial V / \partial \mathbf{q}$ )

Έχουμε:

$$\xi_l = \partial V / \partial q_l = \partial \left( \sqrt{\det(\mathbf{J}_1 \mathbf{J}_1^T)} \right) / \partial q_l = \frac{\sqrt{\det(\mathbf{J}_1 \mathbf{J}_1^T)}}{2} \cdot \sum_{i,j=1}^2 \alpha_{ij} \left( \frac{\partial(\underline{J}_{li})}{\partial q_l} \underline{J}_{1j}^T + \frac{\partial(\underline{J}_{1j})}{\partial q_l} \underline{J}_{li}^T \right)$$

όπου  $\alpha_{ij}$ : το (i,j) στοιχείο του  $\text{inverse}(\mathbf{J}_1 \mathbf{J}_1^T)$

και  $\underline{J}_{li}$ : το i-διάνυσμα γραμμής του πίνακα  $\mathbf{J}_1$



## Έλεγχος Πλεοναζόντων Ρομπότ – Εφαρμογές: Αποφυγή Ιδιομορφιών (3)

Απόδειξη της παραπάνω σχέσης για το  $\xi_i$

Έστω:  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1$  και  $\mathbf{B} = \mathbf{J} \mathbf{J}^T = [\beta_{ij}]$ , οπότε:  $\beta_{ij} = J_i \cdot J_j^T$

Είναι:  $\Delta = \det(\mathbf{J} \mathbf{J}^T) = \det(\mathbf{B}) = \beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21}$

και:  $\frac{\partial \Delta}{\partial q_1} = \frac{\partial \beta_{11}}{\partial q_1} \beta_{22} + \beta_{11} \frac{\partial \beta_{22}}{\partial q_1} - \frac{\partial \beta_{12}}{\partial q_1} \beta_{21} - \beta_{12} \frac{\partial \beta_{21}}{\partial q_1}$

όπου:  $\frac{\partial \beta_{ij}}{\partial q_1} = \frac{\partial J_i}{\partial q_1} J_j^T + J_i \frac{\partial J_j^T}{\partial q_1} = \frac{\partial J_i}{\partial q_1} J_j^T + \frac{\partial J_j}{\partial q_1} J_i^T$

Παίρνουμε τελικά:  $\xi_i = \partial V / \partial q_1 = \partial(\sqrt{\Delta}) / \partial q_1 = \frac{1}{2\sqrt{\Delta}} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial q_1} = \frac{1}{2\sqrt{\Delta}} \cdot \sum_{i,j=1}^2 \alpha'_{ij} \left( \frac{\partial J_i}{\partial q_1} J_j^T + \frac{\partial J_j}{\partial q_1} J_i^T \right)$

όπου:  $\alpha'_{11} = \beta_{22}, \alpha'_{22} = \beta_{11}, \alpha'_{12} = -\beta_{12}, \alpha'_{21} = -\beta_{21}$

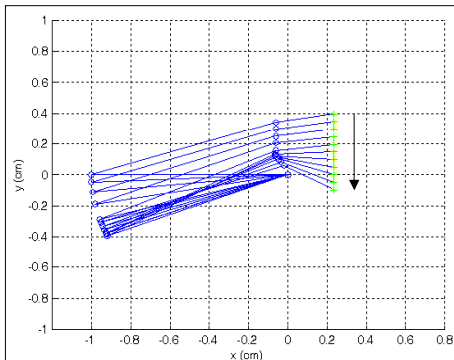
...



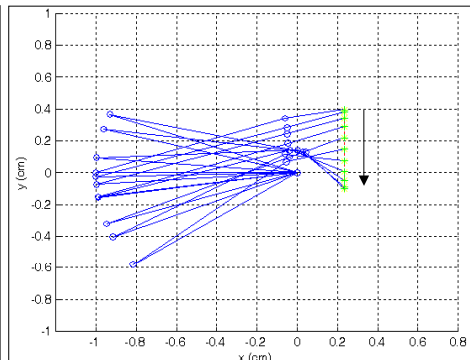
## Έλεγχος Πλεοναζόντων Ρομπότ – Εφαρμογές: Αποφυγή Ιδιομορφιών (4)

➤ Παράδειγμα προσομοίωσης (3 β.ε. → τοποθέτηση στο επίπεδο)  
(εφαρμογή της παραπάνω σχέσης (5))

$$\dot{q}_d = \mathbf{J}_1^+ \dot{p}_d + k_c (\mathbf{I}_n - \mathbf{J}_1^+ \mathbf{J}_1) \cdot \xi$$



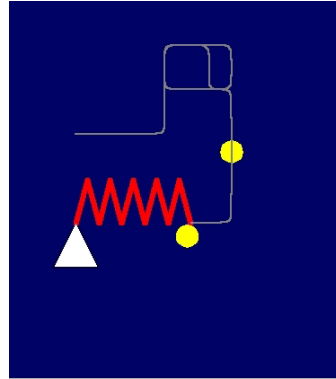
Χωρίς τον έλεγχο πλεοναζόντων β.ε. ( $k_c=0$ )



Με έλεγχο των πλεοναζόντων β.ε. ( $k_c=200$ )



# Έλεγχος Πλεοναζόντων Ρομπότ – Εφαρμογές - Παραδείγματα



Αποφυγή εμποδίων σε πραγματικό χρόνο με κινηματικό έλεγχο των πλεοναζόντων βαθμών ελευθερίας του ρομποτικού χειριστή



# Έλεγχος Πλεοναζόντων Ρομπότ – Συμπεράσματα

- Πλεονάζοντες β.ε. εισάγουν τη δυνατότητα «απειρίας εφικτών κινήσεων» στις αρθρώσεις για δοσμένη επιθυμητή κίνηση στο τελικό στοιχείο δράσης (μηδενικός χώρος ρομποτικών αρθρώσεων)

Πλεονάζοντες βαθμοί ελευθερίας → «Απειρία» λύσεων για το ανάστροφο κινηματικό πρόβλημα → Βελτιστοποίηση

- Κινηματικός έλεγχος πλεοναζόντων βαθμών ελευθερίας – Μεθοδολογία διάσπασης ρομποτικής εργασίας: Διάσπαση σύνθετων ρομποτικών εργασιών σε υπο-εργασίες με σειρά προτεραιότητας (task-decomposition)

Περιγραφή ρομποτικών υποεργασιών με βάση:

- **επιθυμητή τροχιά** ή γενικότερα επιθυμητή «**συμπεριφορά**» (π.χ. μηχανική αντίσταση) του ρομπότ στο χώρο εργασίας (task space)
- **κριτήρια** στο χώρο διάταξης των αρθρώσεων (configuration space) → βελτιστοποίηση



# Ιεραρχική Δομή Ρομποτικών Συστημάτων Ελέγχου

