Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
«ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΙΣΜΟΥ»
Ε.Μ.Π., Ακαδημαϊκό Έτος 2011-12

# Μάθημα: Ρομποτικός Έλεγχος

## Στατική και Δυναμική Ανάλυση Ρομποτικών Χειριστών


Κωνσταντίνος Τζαφέστας

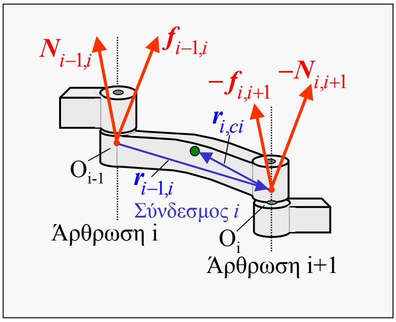
Τομέας Σημάτων, Ελέγχου & Ρομποτικής
Σχολή Ηλεκτρ. Μηχ/κών & Μηχ/κών Υπολ., Ε.Μ.Π.

Τηλ.: (210) 772-3687 (Κτήριο Ηλεκτρ., Γραφείο 21.11)
E-mail: ktzaf@cs.ntua.gr
Web: http://www.softlab.ntua.gr/~ktzaf/




# Στατική Ανάλυση Ρομποτικών Χειριστών

# Ανάλυση Δυνάμεων & Ροπών (1/2)




Ισορροπία Δυνάμεων/Ροπών

$$\begin{cases} f_{i-1,i} - f_{i,i+1} + m_i g = 0 \\ N_{i-1,i} - N_{i,i+1} - (r_{i-1,i} + r_{i,ci}) \times f_{i-1,i} + (-r_{i,ci}) \times (-f_{i,i+1}) = 0 \end{cases}$$

$$F = \begin{bmatrix} f_{n,n+1} \\ N_{n,n+1} \end{bmatrix}$$ δράση από το ρομπότ πάνω στο εξωτερικό περιβάλλον

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_n \end{bmatrix}$$ διάνυσμα γενικευμένων δράσεων στις αρθρώσεις

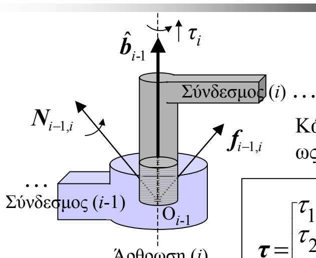
$$\begin{cases} \tau_i = \hat{b}_{i-1}^T \cdot f_{i-1,i} & \text{: πρισματική άρθρωση} \\ \tau_i = \hat{b}_{i-1}^T \cdot N_{i-1,i} & \text{: στροφική άρθρωση} \end{cases}$$

$$\boxed{\tau = \mathbf{J}^T \cdot F}$$

Στατική εξίσωση ρομποτικού χειριστή



# Ανάλυση Δυνάμεων & Ροπών (2/2)




Κάθε άρθρωση εισάγει γεωμετρικούς (κινηματικούς) περιορισμούς ως προς τη σχετική κίνηση των συνδέσμων

| | |
|---|---|
| $\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_n \end{bmatrix}$ διάνυσμα γενικευμένων δράσεων στις αρθρώσεις | $\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$ διάνυσμα γενικευμένων ταχυτήτων στις αρθρώσεις |

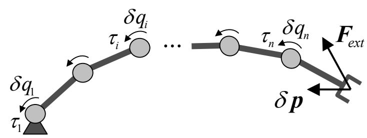
$$\begin{cases} \tau_i = \hat{b}_{i-1}^T \cdot f_{i-1,i} & \text{: πρισματική άρθρωση} \\ \tau_i = \hat{b}_{i-1}^T \cdot N_{i-1,i} & \text{: στροφική άρθρωση} \end{cases}$$

*Γενικευμένη δράση* (ροπή ή δύναμη), ασκούμενη στον (i) σύνδεσμο από το σύνδεσμο (i-1), δυνάμενη να παράγει έργο σε γενικευμένη μετατόπιση.

# Στατικό ρομποτικό μοντέλο

<u>Αρχή Δυνατών Έργων (virtual work principle):</u>

Μηχανικό Σύστημα σε *στατική ισορροπία* ➔ *Δυνατό Έργο* $\delta E = 0$
που παράγεται σε τυχαία (επιτρεπτή) *στοιχειώδη γενικευμένη μετατόπιση* $\delta q$




$$\left\{ \begin{aligned} &\delta E = 0 \\ &\delta E = \delta p^T \cdot F_{ext} + \delta q^T \cdot \tau \\ &\delta p = J \cdot \delta q \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (J \cdot \delta q)^T \cdot F_{ext} + \delta q^T \cdot \tau = 0 \Rightarrow \delta q^T \cdot J^T \cdot F_{ext} + \delta q^T \cdot \tau = 0 \quad \forall \delta q \in \mathbb{R}^n$$

$$\Downarrow$$

$$\tau = -J^T \cdot F_{ext}$$

Στατική εξίσωση ρομποτικού χειριστή

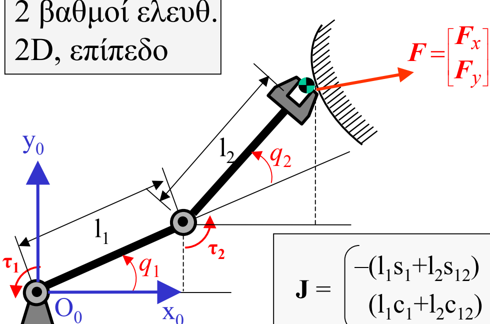
$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T \cdot \boldsymbol{F}$$

όπου: $F = F_{(n \rightarrow n+1)}$, δηλ.: $F_{(\text{robot} \rightarrow \text{external environment})}$



# Στατικό Μοντέλο – Παράδειγμα (1)

2 βαθμοί ελευθ.
2D, επίπεδο



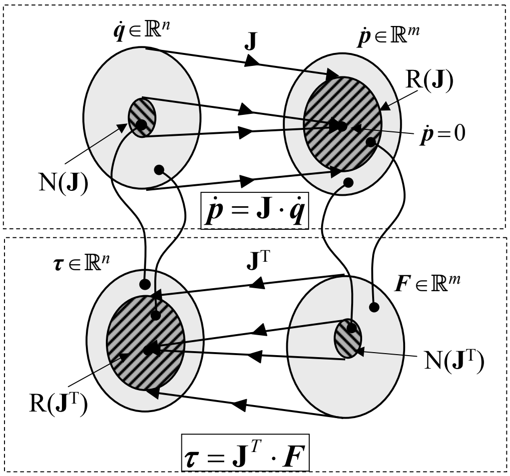

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -(l_1 s_1 + l_2 s_{12}) & -l_2 \cdot s_{12} \\ (l_1 c_1 + l_2 c_{12}) & l_2 \cdot c_{12} \end{pmatrix}$$

Ιακωβιανή Μήτρα

Στατικό Μοντέλο

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(q_1) - l_2 \sin(q_1 + q_2) & l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ -l_2 \sin(q_1 + q_2) & l_2 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix}$$

# Δυϊσμός κινηματικής / στατικής




**Κινηματική**

R(**J**): range space (σύνολο δυνατών ταχυτήτων στο χώρο εργασίας)

N(**J**): null space (μηδενικός χώρος)

N(**J**): ορθογώνιο συμπλήρωμα (R($\mathbf{J}^{\mathrm{T}}$))

R(**J**): ορθογώνιο συμπλήρωμα (N($\mathbf{J}^{\mathrm{T}}$))

**Στατική**



# Μηχανική Αντίσταση (stiffness)

(1α) $\boxed{\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T \cdot \boldsymbol{F}}$ : Στατικό Μοντέλο

(1β) $\boxed{\delta \boldsymbol{p} = \mathbf{J} \cdot \delta \boldsymbol{q}}$ : Κινηματικό Μοντέλο

$\tau_i = k_{qi} \cdot \Delta q_i \quad (i=1,\dots,n)$

(2) $\boxed{\boldsymbol{\tau} = \mathbf{K}_q \cdot \Delta \boldsymbol{q}}$ : Μοντέλο «μηχανικής αντίστασης» (ακαμψίας) αρθρώσεων

$$K_q = \begin{bmatrix} k_{q1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & k_{qn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \tau = J^{\mathrm{T}} F \\ \delta p = J\,\delta q \end{cases}$$

$$\delta \boldsymbol{p} = \underbrace{\left(\mathbf{J} \cdot \mathbf{K}_q^{-1} \cdot \mathbf{J}^T\right)}_{\mathbf{C}} \boldsymbol{F}$$

Compliance matrix
Μήτρα «μηχανικής συμμόρφωσης»

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= \mathbf{K}_p \cdot \delta \boldsymbol{p} \\ \mathbf{K}_p &= \left(\mathbf{J} \cdot \mathbf{K}_q^{-1} \cdot \mathbf{J}^T\right)^{-1} \end{aligned}}$$

Stiffness matrix
Μήτρα «μηχανικής αντίστασης»

# Δυναμική Ανάλυση Ρομποτικών Χειριστών

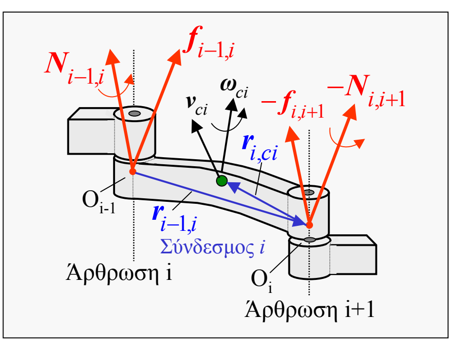
(A) Μοντέλο Newton-Euler

(B) Μοντέλο Lagrange





# Εξισώσεις κίνησης Newton-Euler




Εξίσωση κίνησης Newton:

$$\sum(\boldsymbol{f}_i)=\frac{d}{dt}\boldsymbol{E}_i \qquad (\ \boldsymbol{E}_i=m_i\boldsymbol{v}_{ci}\ :\ \text{ορμή})$$

$$\boxed{\boldsymbol{f}_{i-1,i}-\boldsymbol{f}_{i,i+1}+m_i\boldsymbol{g}=m_i\dot{\boldsymbol{v}}_{ci}}$$

Εξίσωση κίνησης Euler:

$$\sum\boldsymbol{N}_i=\frac{d}{dt}\boldsymbol{G}_i \quad (\ \boldsymbol{G}=\int_V \boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}\rho dV\ :\ \text{στροφορμή})$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\boldsymbol{N}_{i-1,i}-\boldsymbol{N}_{i,i+1}-\boldsymbol{r}_{i-1,ci}\times\boldsymbol{f}_{i-1,i}+\boldsymbol{r}_{i,ci}\times\boldsymbol{f}_{i,i+1}=\\&\mathbf{I}_i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i+\boldsymbol{\omega}_i\times(\mathbf{I}_i\boldsymbol{\omega}_i)\end{aligned}}$$

$$\mathbf{I}=\int_V\{(\boldsymbol{r}^T\boldsymbol{r}I_3)-\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}^T\}\rho dV \qquad \text{(τανυστής αδρανείας)} \qquad \left(\begin{array}{c} a\times(b\times c)=(a^Tc)b-(a^Tb)c \\ (a^Tb)c=(ca^T)b \end{array}\right)$$

$$\mathbf{I}=\begin{bmatrix} \int\{(y-y_c)^2+(z-z_c)^2\}\rho dV & -\int(x-x_c)(y-y_c)\rho dV & -\int(z-z_c)(x-x_c)\rho dV \\ -\int(x-x_c)(y-y_c)\rho dV & \int\{(z-z_c)^2+(x-x_c)^2\}\rho dV & -\int(y-y_c)(z-z_c)\rho dV \\ -\int(z-z_c)(x-x_c)\rho dV & -\int(y-y_c)(z-z_c)\rho dV & \int\{(x-x_c)^2+(y-y_c)^2\}\rho dV \end{bmatrix}$$

# Μοντέλο Newton-Euler: Απόδειξη (1)

$\boldsymbol{G} = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}$ και ${}^{(\sigma)}\boldsymbol{G} = {}^{(\sigma)}\mathbf{I} \cdot {}^{(\sigma)}\boldsymbol{\omega}$

όπου

$$\mathbf{I} = \int_V \left\{ \left(\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{r}\right) I_3 - \left(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\right) \right\} \rho dV \quad \text{και} \quad {}^{(\sigma)}\mathbf{I} = \int_V \left\{ \left({}^{\sigma}\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}} \cdot {}^{\sigma}\boldsymbol{r}\right) I_3 - \left({}^{\sigma}\boldsymbol{r} \cdot {}^{\sigma}\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\right) \right\} \rho dV$$

Είναι: $\underbrace{\boldsymbol{r} = {}^{(0)}\boldsymbol{r} = R_{\Sigma}^{0} \cdot {}^{\sigma}\boldsymbol{r} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}} = {}^{\sigma}\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}} \cdot \left(R_{\Sigma}^{0}\right)^{\mathrm{T}} \text{ ή } {}^{\sigma}\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}} \cdot R_{\Sigma}^{0}}$

$$\mathbf{I} = \int_V \left\{ \left(\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{r}\right) I_3 - \left[ \left(R_{\Sigma}^{0} \cdot {}^{\sigma}\boldsymbol{r}\right) \cdot \left({}^{\sigma}\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}} \cdot \left(R_{\Sigma}^{0}\right)^{\mathrm{T}}\right) \right] \right\} \rho dV \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{I} = \int_V \left\{ \left({}^{\sigma}\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}} \cdot {}^{\sigma}\boldsymbol{r}\right) R_{\Sigma}^{0} \cdot \left(R_{\Sigma}^{0}\right)^{\mathrm{T}} - \left[ \left(R_{\Sigma}^{0} \cdot {}^{\sigma}\boldsymbol{r}\right) \cdot \left({}^{\sigma}\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}} \cdot \left(R_{\Sigma}^{0}\right)^{\mathrm{T}}\right) \right] \right\} \rho dV$$

$$\mathbf{I} = \left(R_{\Sigma}^{0}\right) \cdot \Big\{ \underbrace{\int_V \left[ \left({}^{\sigma}\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}} \cdot {}^{\sigma}\boldsymbol{r}\right) I_3 - \left({}^{\sigma}\boldsymbol{r} \cdot {}^{\sigma}\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\right) \right] \rho dV}_{{}^{(\sigma)}\mathbf{I}} \Big\} \left(R_{\Sigma}^{0}\right)^{\mathrm{T}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{I} = \left(R_{\Sigma}^{0}\right) \cdot {}^{(\sigma)}\mathbf{I} \cdot \left(R_{\Sigma}^{0}\right)^{\mathrm{T}}}$$





# Μοντέλο Newton-Euler: Απόδειξη (2)

$$\boxed{\frac{d\vec{G}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\left(\left(R_{\Sigma}^{0}\right) \cdot {}^{(\Sigma)}\underline{G}\right)\right] = \left(R_{\Sigma}^{0}\right) \cdot {}^{(\Sigma)}\mathbf{I} \cdot {}^{(\Sigma)}\underline{\dot{\omega}} + \underbrace{\frac{d\left(R_{\Sigma}^{0}\right)}{dt}} \cdot {}^{(\Sigma)}\mathbf{I} \cdot {}^{(\Sigma)}\underline{\omega}}$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η σχέση: $(*)\ \dfrac{d\left(R_B^A\right)}{dt} = \left[{}^{(A)}\omega_B \times R_B^A\right]$

$$\vec{G} = \mathbf{I} \cdot \underline{\omega} = \underbrace{\left(R_{\Sigma}^{0}\right) \cdot {}^{(\Sigma)}\mathbf{I} \cdot \left(R_{\Sigma}^{0}\right)^{\mathrm{T}}}_{\mathbf{I}} \cdot \left(R_{\Sigma}^{0}\right) \cdot {}^{(\Sigma)}\underline{\omega} = \left(R_{\Sigma}^{0}\right) \cdot \underbrace{{}^{(\Sigma)}\mathbf{I} \cdot {}^{(\Sigma)}\underline{\omega}}_{{}^{(\Sigma)}\underline{G}} = \left(R_{\Sigma}^{0}\right) \cdot {}^{(\Sigma)}\underline{G}$$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \boxed{\begin{aligned} \vec{N} = \frac{d\vec{G}}{dt} &= \left(R_{\Sigma}^{0}\right) \cdot {}^{(\Sigma)}\mathbf{I} \cdot {}^{(\Sigma)}\underline{\dot{\omega}} + {}^{(0)}\omega_{\Sigma} \times \left(R_{\Sigma}^{0} \cdot {}^{(\Sigma)}\mathbf{I} \cdot {}^{(\Sigma)}\underline{\omega}\right) \\ &= \left(R_{\Sigma}^{0}\right) \cdot \underbrace{\left[{}^{(\Sigma)}\mathbf{I} \cdot {}^{(\Sigma)}\underline{\dot{\omega}} + {}^{(\Sigma)}\omega_{\Sigma} \times \left({}^{(\Sigma)}\mathbf{I} \cdot {}^{(\Sigma)}\underline{\omega}\right)\right]}_{{}^{(\Sigma)}\underline{N}} \end{aligned}} \qquad \left( \underline{\omega} = \left(R_{\Sigma}^{0}\right) \cdot {}^{(\Sigma)}\underline{\omega} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{G}}{dt} = \left(R_{\Sigma}^{0}\right) \cdot {}^{(\Sigma)}\mathbf{I} \cdot \left(R_{\Sigma}^{0}\right)^{\mathrm{T}} \cdot \underline{\dot{\omega}} + \omega \times \left(R_{\Sigma}^{0} \cdot {}^{(\Sigma)}\mathbf{I} \cdot \left(R_{\Sigma}^{0}\right)^{\mathrm{T}} \underline{\omega}\right)$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{d\vec{G}}{dt} = \mathbf{I} \cdot \underline{\dot{\omega}} + \omega \times \left(\mathbf{I} \cdot \underline{\omega}\right)}$$

# Δυναμικό Μοντέλο Lagrange

$\boxed{L = K - P}$ Λαγκρανζιανή συνάρτηση (Lagrangian)
$K$: κινητική, $P$: δυναμική ενέργεια

$K = \sum_{i=1}^{n} K_i$ όπου $K_i = \frac{1}{2} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_{ci}^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{r}}_{ci} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i}$$

$\tau_i$: γενικευμένη δράση στον $i$ βαθμό ελευθερίας
$q_i$: γενικευμένη μετατόπιση στον $i$ βαθμό ελευθερίας

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_i} + \frac{\partial P}{\partial q_i} = \tau_i}$$

Δυναμική εξίσωση (μοντέλο) Lagrange





# Μοντέλο Lagrange – Απόδειξη (1/2)

Έστω σύστημα σημειακών μαζών $\mu$ (μάζας $m_\mu$), με $n$ βαθμούς ελευθερίας (β.ε.)
$q_1, \ldots, q_n$: γενικευμένες μεταβλητές μετατόπισης στους β.ε.

$\boxed{\underline{x}_\mu = \underline{x}_\mu(q_1, \ldots, q_n)}$ (1) και $\boxed{\underline{F}_\mu = m_\mu \cdot \underline{\ddot{x}}_\mu}$ (2) : συνολική δύναμη ασκούμενη στη μάζα $\mu$

$$\underline{\dot{x}}_\mu = \sum_i \left(\frac{\partial x_\mu}{\partial q_i} \cdot \dot{q}_i\right) \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \dot{x}_\mu}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial x_\mu}{\partial q_i}} \quad (3)$$

Κινητική Ενέργεια: $\boxed{K = \sum_\mu \frac{1}{2} m_\mu \cdot \underline{\dot{x}}_\mu^{\mathrm{T}} \cdot \underline{\dot{x}}_\mu}$ (4)

Έστω $Q_i$: γενικευμένη δράση στον $i$ β.ε.:

$$\boxed{Q_i = \sum_\mu F_\mu^T \cdot \frac{\partial x_\mu}{\partial q_i}} \quad (5)$$

$$\left\{ \text{αφού: } Q_i \cdot \delta q_i = \sum_\mu F_\mu^{\mathrm{T}} \cdot \delta x_\mu \right\}$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \overset{(4)}{=} \sum_\mu m_\mu \cdot \dot{x}_\mu^{\mathrm{T}} \cdot \frac{\partial \dot{x}_\mu}{\partial \dot{q}_i} \overset{(3)}{=} \sum_\mu m_\mu \cdot \dot{x}_\mu^{\mathrm{T}} \cdot \frac{\partial x_\mu}{\partial q_i} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i}\right) = \underbrace{\sum_\mu m_\mu \cdot \ddot{x}_\mu^{\mathrm{T}} \cdot \frac{\partial x_\mu}{\partial q_i}}_{\substack{Q_i \\ (5),(2)}} + \underbrace{\sum_\mu m_\mu \cdot \dot{x}_\mu^{\mathrm{T}} \cdot \frac{\partial \dot{x}_\mu}{\partial q_i}}_{\substack{\partial K / \partial q_i \\ (4)}} \quad (6)$$

Άρα: $\boxed{Q_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_i}}$ (7)

# Μοντέλο Lagrange – Απόδειξη (2/2)

Έστω $P$: δυναμική ενέργεια (αποθηκευμένη στο μηχανικό σύστημα)

Συντηρητική Δύναμη

$$F_\mu = F_{\mu,P} + F_{\mu,\mathrm{T}} \quad \text{και} \quad Q_i = Q_{i,P} + \tau_i$$

όπου: $\boxed{\underline{F}_{\mu,P} = -\nabla_{x_\mu} P = -\dfrac{\partial P}{\partial \underline{x}_\mu}}$ και $\boxed{Q_{i,P} = \sum_\mu \underline{F}_{\mu,P}^T \cdot \dfrac{\partial \underline{x}_\mu}{\partial q_i} = -\dfrac{\partial P}{\partial q_i}}$ $\left(\text{και } \dfrac{\partial P}{\partial \dot{q}_i} = 0\right)$

Άρα (από (6)):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i}\right) = \overbrace{\sum_\mu (F_{\mu,P} + F_{\mu,\mathrm{T}})^T \cdot \frac{\partial x_\mu}{\partial q_i}}^{Q_i = Q_{i,P} + \tau_i} + \frac{\partial K}{\partial q_i} = \overbrace{\sum_\mu F_{\mu,P}^T \cdot \frac{\partial x_\mu}{\partial q_i}}^{Q_{i,P} = -\partial P / \partial q_i} + \tau_i + \frac{\partial K}{\partial q_i} \Rightarrow$$

$$\boxed{\tau_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_i} + \frac{\partial P}{\partial q_i}} \quad \text{ή} \quad \boxed{\tau_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}}$$

: Μοντέλο Lagrange
(όπου: $L = K - P$)





# Προσδιορισμός Μήτρας Αδρανείας (1/2)

$$\boxed{K_i = \tfrac{1}{2} m_i v_{ci}^{\mathrm{T}} \cdot v_{ci} + \tfrac{1}{2} \omega_{ci}^{\mathrm{T}} \cdot I_i \cdot \omega_{ci} \Rightarrow K = \sum_{i=1}^{n} (K_i)}$$

Ισχύει:

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{v}_{ci} = J_{L_1}^{(\mathrm{i})} \cdot \dot{q}_1 + \ldots + J_{L_i}^{(\mathrm{i})} \cdot \dot{q}_i \\ \boldsymbol{\omega}_{ci} = J_{A_1}^{(\mathrm{i})} \cdot \dot{q}_1 + \ldots + J_{A_i}^{(\mathrm{i})} \cdot \dot{q}_i \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{v}_{ci} = J_L^{(\mathrm{i})} \cdot \dot{\boldsymbol{q}} \\ \boldsymbol{\omega}_{ci} = J_A^{(\mathrm{i})} \cdot \dot{\boldsymbol{q}} \end{array}\right\}$$

όπου: $J_L^{(\mathrm{i})} = \Big[\underbrace{\underline{J}_{L_1}^{(\mathrm{i})} \ldots \underline{J}_{L_i}^{(\mathrm{i})}}_{i} \; \underbrace{0 \ldots 0}_{n-i}\Big]$ και $J_A^{(\mathrm{i})} = \Big[\underbrace{\underline{J}_{A_1}^{(\mathrm{i})} \ldots \underline{J}_{A_i}^{(\mathrm{i})}}_{i} \; \underbrace{0 \ldots 0}_{n-i}\Big]$

$$\underline{J}_{L_j}^{(\mathrm{i})} = \begin{cases} \hat{b}_{j-1} & : \text{πρισματική} \\ \hat{b}_{j-1} \times r_{j-1,ci}^{(0)} & : \text{στροφική} \end{cases} \qquad (j = 1, \ldots, i)$$

$$\underline{J}_{A_j}^{(\mathrm{i})} = \begin{cases} 0 & : \text{πρισματική} \\ \hat{b}_{j-1} & : \text{στροφική} \end{cases} \qquad (j = 1, \ldots, i)$$

# Προσδιορισμός Μήτρας Αδρανείας (2/2)

Άρα:

$$K=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(m_i\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\cdot J_L^{(\mathrm{i})^{\mathrm{T}}}\cdot J_L^{(\mathrm{i})}\cdot\dot{\boldsymbol{q}} + \dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\cdot J_A^{(\mathrm{i})^{\mathrm{T}}}\cdot\mathbf{I}_i\cdot J_A^{(\mathrm{i})}\cdot\dot{\boldsymbol{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{D}(\boldsymbol{q})\cdot\dot{\boldsymbol{q}}$$

Επομένως: $\boxed{K = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{D}(\boldsymbol{q})\cdot\dot{\boldsymbol{q}}}$

όπου η μήτρα αδρανείας: $\boxed{\mathbf{D} = \sum_{i=1}^{n}(m_i\cdot J_L^{(\mathrm{i})^{\mathrm{T}}}\cdot J_L^{(\mathrm{i})} + J_A^{(\mathrm{i})^{\mathrm{T}}}\cdot\mathbf{I}_i\cdot J_A^{(\mathrm{i})})}$

(D: συμμετρική μήτρα)





# Εξαγωγή δυναμικού μοντέλου (1/3)

Δυναμικό Μοντέλο Lagrange:

$$\boldsymbol{\tau}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial\dot{q}}\right)-\frac{\partial K}{\partial q}+\frac{\partial P}{\partial q} \Rightarrow \boldsymbol{\tau}=\frac{d}{dt}\left(\mathbf{D}(\boldsymbol{q})\cdot\dot{\boldsymbol{q}}\right)-\frac{\partial K}{\partial q}+\frac{\partial P}{\partial q}$$

(D: συμμετρική μήτρα) $\left(K = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{D}(\boldsymbol{q})\cdot\dot{\boldsymbol{q}}\right)$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{D}(\boldsymbol{q})\cdot\ddot{\boldsymbol{q}} + \underbrace{\dot{\mathbf{D}}(\boldsymbol{q})\cdot\dot{\boldsymbol{q}} - \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\frac{\partial D}{\partial q}\dot{\boldsymbol{q}}}_{\boldsymbol{h}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})} + \underbrace{\frac{\partial P}{\partial q}}_{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})}$$

…

# Εξαγωγή δυναμικού μοντέλου (2/3)

(D: συμμετρική μήτρα) $\left(K=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\boldsymbol{D}_{jk}\cdot\dot{q}_j\cdot\dot{q}_k\right)\right)$

$$\tau_i=\frac{d}{dt}\left[\sum_{j=1}^{n}\left(D_{ij}(\boldsymbol{q})\cdot\dot{q}_j\right)\right]-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial D_{jk}}{\partial q_i}\cdot\dot{q}_j\cdot\dot{q}_k\right)+\frac{\partial P}{\partial q_i}$$

$$\tau_i=\underbrace{\sum_{j=1}^{n}\left(D_{ij}(\boldsymbol{q})\cdot\ddot{q}_j\right)}_{[\mathbf{D}(\boldsymbol{q})\cdot\ddot{\boldsymbol{q}}]_{(i_{th}\text{ row})}}+\underbrace{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial D_{ij}}{\partial q_k}\cdot\dot{q}_j\dot{q}_k\right)-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial D_{jk}}{\partial q_i}\cdot\dot{q}_j\dot{q}_k\right)}_{h_i(q,\dot{q})}+\underbrace{\frac{\partial P}{\partial q_i}}_{g_i(\boldsymbol{q})}$$

$$\boldsymbol{h}(q,\dot{q})=\left[h_i(q,\dot{q})\right]_{i=1,\dots,n}=\left[\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(h_{ijk}(q)\cdot\dot{q}_j\dot{q}_k\right)\right]_{i=1,\dots,n}$$

με: $h_{ijk}(q)=\frac{\partial D_{ij}}{\partial q_k}-\frac{1}{2}\frac{\partial D_{jk}}{\partial q_i}$

$P=\sum_{j=1}^{n}\left(m_j\hat{g}^T\vec{r}_{0,cj}\right)$

Στην άρθρωση $i$ επιδρούν στον όρο βαρύτητας $g_i$ μόνο οι σύνδεσμοι με: $j \geq i$

$$g_i(q)=\frac{\partial P}{\partial q_i}=\sum_{j=1}^{n}m_j\hat{g}^T\frac{\partial\vec{r}_{0,cj}}{\partial q_i}=\sum_{j=1}^{n}m_j\hat{g}^T J_{Li}^{(j)}(q)$$





# Εξαγωγή δυναμικού μοντέλου (3/3)

$$\boldsymbol{\tau}=\mathbf{D}(\boldsymbol{q})\cdot\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{h}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})\ \left(-J^T F_e\right)$$

$$\Rightarrow\ \mathbf{D}=\sum_{i=1}^{n}\left(m_i\cdot J_L^{(i)^T}\cdot J_L^{(i)}+J_A^{(i)^T}\cdot\mathbf{I}_i\cdot J_A^{(i)}\right)$$

$$\Rightarrow\ \boldsymbol{h}(q,\dot{q})=\left[h_i(q,\dot{q})\right]_{i=1,\dots,n}=\left[\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(h_{ijk}(q,\dot{q})\cdot\dot{q}_j\dot{q}_k\right)\right]_{i=1,\dots,n}$$

όπου: $h_{ijk}(q,\dot{q})=\frac{\partial D_{ij}}{\partial q_k}-\frac{1}{2}\frac{\partial D_{jk}}{\partial q_i}$

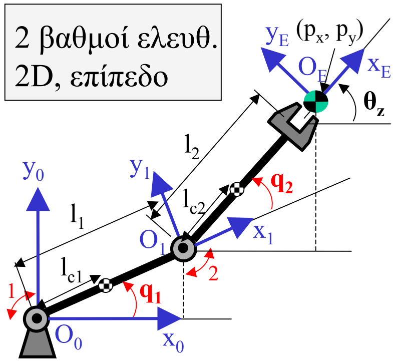
ή: $\boldsymbol{h}(q,\dot{q})=\underbrace{\left[C_{ij}(q,\dot{q})\right]}_{C(q,\dot{q})}\cdot\dot{q}$ όπου: $C_{ij}(q,\dot{q})=\sum_{k=1}^{n}\left(h_{ijk}(q)\cdot\dot{q}_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\left(\frac{\partial D_{ij}}{\partial q_k}-\frac{1}{2}\frac{\partial D_{jk}}{\partial q_i}\right)\cdot\dot{q}_k\right)$

$$\Rightarrow\ \boldsymbol{g}(q)=\left[g_i(q)\right]_{i=1,\dots,n}$$

όπου: $g_i(q)=\frac{\partial P}{\partial q_i}=\sum_{j=1}^{n}m_j\hat{g}^T\frac{\partial\vec{r}_{0,cj}}{\partial q_i}=\sum_{j=1}^{n}m_j\hat{g}^T J_{Li}^{(j)}(q)$

# Δυναμικό Μοντέλο Ρομπότ : Παράδειγμα (1)

2 βαθμοί ελευθ.
2D, επίπεδο




$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{D}(\boldsymbol{q})\cdot\ddot{\boldsymbol{q}} + \mathbf{h}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) + \mathbf{g}(\boldsymbol{q})$$

$$h_i(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = \sum_{j,k} h_{ijk}\dot{q}_j\dot{q}_k$$

$$\begin{cases} D_{11} = I_1 + m_1 l_{c1}^2 + I_2 + m_2\left(l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} c_2\right) \\ D_{12} = D_{21} = I_2 + m_2\left(l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} c_2\right) \\ D_{22} = I_2 + m_2 l_{c2}^2 \\ h_{122} = h_{112} = -h_{211} = -m_2 l_1 l_{c2} s_2 \\ g_1 = m_1 g l_{c1} c_1 + m_2 g\left(l_1 c_1 + l_{c2} c_{12}\right) \\ g_2 = m_2 g\left(l_{c2} c_{12}\right) \end{cases}$$

- $D_{ii}$: ενεργός αδράνεια, άρθρωση i
- $D_{ij}$: αδράνεια σύζευξης, αρθρώσεις i,j
- $h_{ijj}$: συντελεστής φυγόκεντρου δύναμης
- $h_{ijк}$: συντελεστής δύναμης Coriolis



# Παράδειγμα (1) (συνέχεια) (1/2)

$$\begin{cases} K_1 = \frac{1}{2}m_1 v_{c1}^2 + \frac{1}{2}I_1\omega_{c1}^2 \\ K_2 = \frac{1}{2}m_2 v_{c2}^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_{c2}^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} P_1 = m_1 g(r_{0,c1})_y \\ P_2 = m_2 g(r_{0,c2})_y \end{cases}$$

$$(v_{c1})^2 = (l_{c1}\dot{q}_1)^2 \ , \quad (\omega_{c1})^2 = (\dot{q}_1)^2 \quad \text{και} \quad (r_{0,c1})_y = l_{c1}\cdot\sin q_1$$

$$v_{c2} = \begin{bmatrix}0\\0\\\dot{q}_1\end{bmatrix} \times \underbrace{\begin{bmatrix}l_1c_1 + l_{c2}c_{12}\\ l_1s_1 + l_{c2}s_{12}\\ 0\end{bmatrix}}_{r_{0,c2}} + \begin{bmatrix}0\\0\\\dot{q}_2\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}l_{c2}c_{12}\\ l_{c2}s_{12}\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\dot{q}_1(l_1s_1 + l_{c2}s_{12}) - \dot{q}_2(l_{c2}s_{12})\\ \dot{q}_1(l_1c_1 + l_{c2}c_{12}) + \dot{q}_2(l_{c2}c_{12})\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (v_{c2})^2 = \ldots = \dot{q}_1^2\left(l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1l_{c2}c_2\right) + \dot{q}_2^2 l_{c2}^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2\left(l_{c2}^2 + l_1l_{c2}c_2\right)$$

$$\text{και} \quad \omega_{c2} = \dot{q}_1 + \dot{q}_2$$

# Παράδειγμα (1) (συνέχεια) (2/2)

Άρα: $\left( K = K_1 + K_2 \quad \text{και} \quad P = P_1 + P_2 \right)$

- $K_1 = \frac{1}{2} m_1 l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2$ • $P_1 = m_1 g l_{c1} s_1$

- $K_2 = \frac{1}{2} m_2 \left[ l_1^2 \dot{q}_1^2 + l_{c2}^2 \left( \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 \right) + 2 l_1 l_{c2} c_2 \left( \dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2 \right) + 2 l_{c2}^2 (\dot{q}_1 \dot{q}_2) \right] + \frac{1}{2} I_2 \left( \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \right)^2$
- $P_2 = m_2 g [l_1 s_1 + l_{c2} s_{12}]$

$$\circ \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_1} = m_1 l_{c1}^2 \dot{q}_1 + I_1 \dot{q}_1 + m_2 \left( l_1^2 + l_{c2}^2 + 2 l_1 l_{c2} c_2 \right) \dot{q}_1 + m_2 \left( l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} c_2 \right) \dot{q}_2 + I_2 \left( \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_1} \right) = \ldots = \left[ I_1 + m_1 l_{c1}^2 + I_2 + m_2 \left( l_1^2 + l_{c2}^2 + 2 l_1 l_{c2} c_2 \right) \right] \ddot{q}_1 + \left[ I_2 + m_2 \left( l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} c_2 \right) \right] \ddot{q}_2$$
$$- 2 m_2 l_1 l_{c2} s_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 - m_2 l_1 l_{c2} s_2 (\dot{q}_2)^2$$

Επιπλέον: $\circ \frac{\partial K}{\partial q_1} = 0$ και $\circ \frac{\partial P}{\partial q_1} = m_1 g l_{c1} c_1 + m_2 g [l_1 c_1 + l_{c2} c_{12}]$

$$\Rightarrow \tau_1 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_1} + \frac{\partial P}{\partial q_1} = D_{11} \ddot{q}_1 + D_{12} \ddot{q}_2 + h_{122} \dot{q}_2^2 + 2 h_{112} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + g_1$$ όπου $D_{11}$=…