ΕΝΟΤΗΤΑ 3

ΜΕΘΟΔΟΙ ΓΡΑΦΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΙΚΤΥΩΝ

- **Τοπολογική Ανάλυση Δικτύου με Γράφους**
- **Απλή Μέθοδος Κόμβων**

  για γραμμικά, μη-γραμμικά, & χρονικά-μεταβαλλόμενα δίκτυα
- **Μέθοδος Θεμελιωδών Ομάδων Διαχωρισμού**
- **Μέθοδος Θεμελιωδών Βρόχων**
- **Μέθοδος Αραιού Πίνακα**

  Με κόμβους, θεμελ. ομάδες διαχωρισμού, θεμελ. βρόχους

  Για γραμμικά, μη-γραμμικά, χρονικά-μεταβαλλόμενα δίκτυα
- **Τροποποιημένη Μέθοδος Κόμβων**

  για γραμμικά, μη-γραμμικά, χρονικά-μεταβαλλόμενα δίκτυα
- **Εξισώσεις Κατάστασης**
- **Μέθοδοι με Δύο (2) Γράφους**

  Μέθοδος Αραιού Πίνακα με 2 γράφους

  Τροποποιημένη Μέθοδος Κόμβων με 2 γράφους

ΑΠΛΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΚΟΜΒΩΝ (Node Analysis)

Περιορισμοί: μόνο στοιχεία που ελέγχονται από τάση, και οι κλάδοι με ανεξάρτητες πηγές ρεύματος να μην σχηματίζουν ομάδα διαχωρισμού.

0. Αρίθμηση n κόμβων & b κλάδων, επιλογή κόμβου & φορών αναφοράς, Γράφος, $\mathbf{A}$=μήτρα πρόσπτωσης.
   $\mathbf{i}=[i_1,...,i_b]^T$, $\mathbf{v}=[v_1,...,v_b]^T$: ρεύματα, τάσεις κλάδων
   $\mathbf{e}=[e_1,...,e_{n-1}]^T$ =τάσεις κόμβων

1. N.P.K. στους $n-1$ κόμβους: $\mathbf{A}\mathbf{i}=\mathbf{0}$
   ($\mathbf{i}_j$=ρεύματα κλάδων με ανεξ. πηγές ρεύματος)

$$\mathbf{A}=[\mathbf{A}_p \vdots \mathbf{A}_j],\ \mathbf{i}=[\mathbf{i}_p \vdots \mathbf{i}_j]^T \Longrightarrow \mathbf{A}_p\mathbf{i}_p=-\mathbf{A}_j\mathbf{i}_j=\mathbf{i}_s$$

2. Ρεύματα κλάδων = *συνάρτηση*(τάσεις κλάδων): $\mathbf{i}_p=g(\mathbf{v}_p)$

3. Τάσεις κλάδων $\longrightarrow$ τάσεις κόμβων: $\mathbf{v}_p=\mathbf{A}_p^T\mathbf{e}$

$n-1$ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΟΜΒΩΝ

(άγνωστοι: $e_k(t), k=1,...,n-1$)

Μη-γραμμικά στοιχεία: $\mathbf{i}_p=g(\mathbf{v}_p)$

$$\mathbf{A}_p g\left(\mathbf{A}_p^T\mathbf{e}(t)\right)=\mathbf{i}_s(t)$$

Γραμμικά, χρονικά-αμετάβλητα στοιχεία R: $\mathbf{i}_p(t)=\mathbf{Y}_p\mathbf{v}_p(t)$
$\mathbf{Y}_n=\mathbf{A}_p\mathbf{Y}_p\mathbf{A}_p^T$ = μήτρα αγωγιμοτήτων κόμβων (node admittance matrix)

$$\mathbf{Y}_n\mathbf{e}(t)=\mathbf{i}_s(t)$$

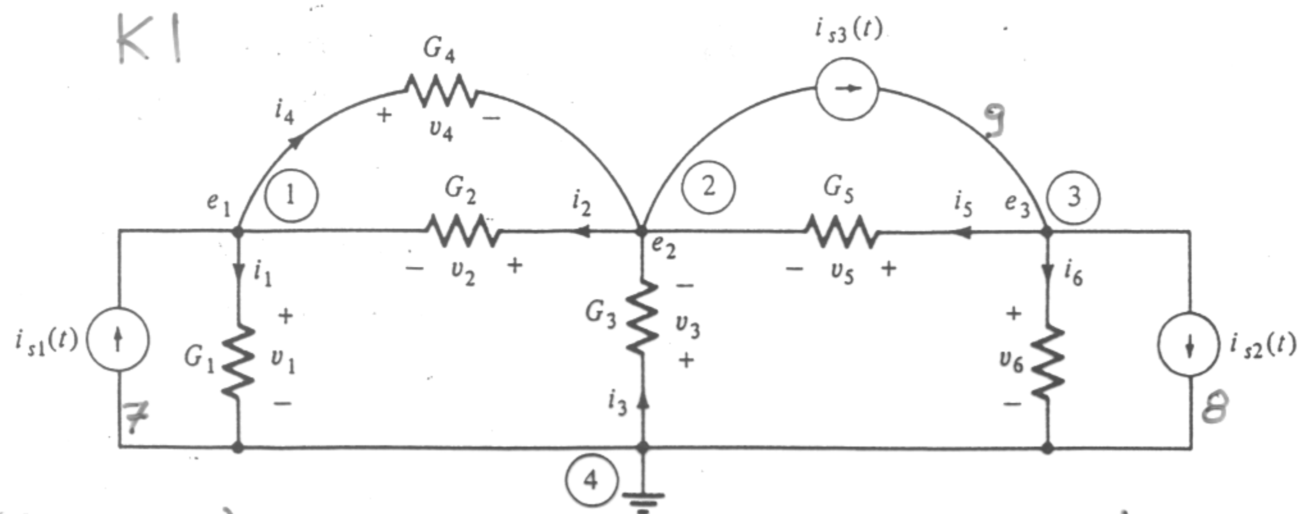
Γραμμικά, χρονικά-μεταβαλλόμενα στοιχεία R: $\mathbf{i}_p(t)=\mathbf{Y}_p(t)\mathbf{v}_p(t)$

$$\mathbf{Y}_n(t)\mathbf{e}(t)=\mathbf{i}_s(t)$$

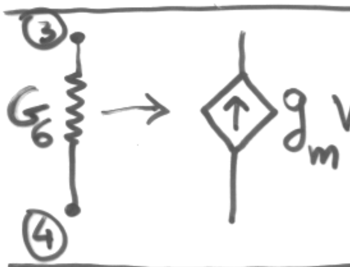
Γραμμικά, χρονικά-αμετάβλητα στοιχεία RLC: $\mathbf{I}_p(s)=\mathbf{Y}_p(s)\mathbf{V}_p(s)+I_i$

$$\mathbf{Y}_n(s)\mathbf{E}(s)=\mathbf{I}_s(s)+\mathbf{A}_p I_i$$

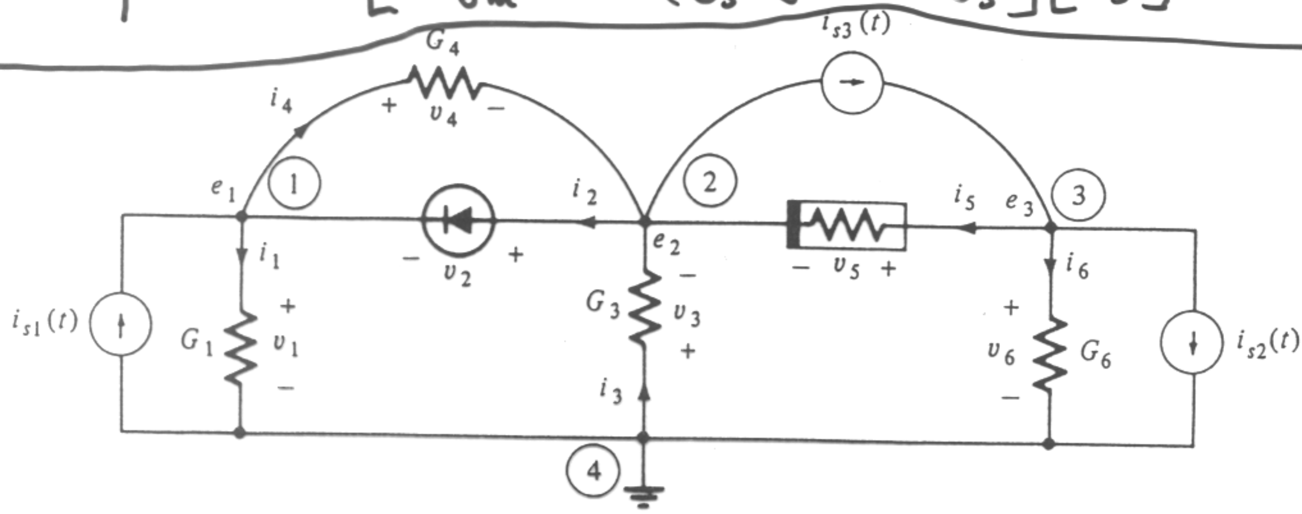
K1



$$\underbrace{\begin{bmatrix} (G_1+G_2+G_4) & -(G_2+G_4) & 0 \\ -(G_2+G_4) & (G_2+G_3+G_4+G_5) & -G_5 \\ 0 & -G_5 & (G_5+G_6) \end{bmatrix}}_{Y_n} \underbrace{\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}}_{e(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} i_{s1}(t) \\ -i_{s3}(t) \\ i_{s3}(t)-i_{s2}(t) \end{bmatrix}}_{i_s(t)}$$



$$\Rightarrow \begin{bmatrix} G_1+G_2+G_4 & -(G_2+G_4) & 0 \\ -(G_2+G_4) & G_2+G_3+G_4+G_5 & -G_5 \\ g_m & -(G_5+g_m) & G_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = i_s(t)$$



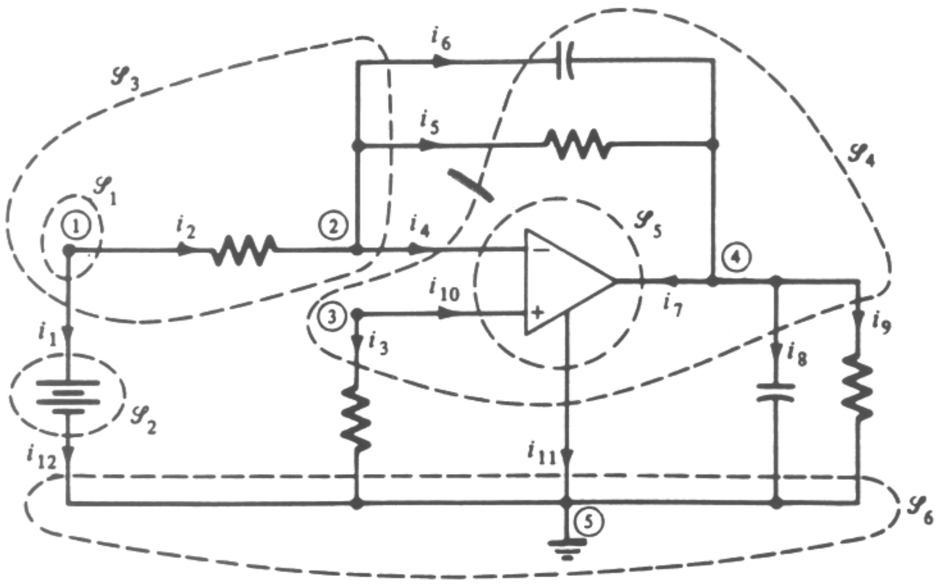
nonlinear circuit.

$$i_1 = G_1 v_1 = G_1 e_1 \qquad i_4 = G_4 v_4 = G_4(e_1 - e_2)$$

$$i_2 = I_s\left(\exp\frac{v_2}{V_T} - 1\right) = I_s\left(\exp\frac{e_2 - e_1}{V_T} - 1\right) \qquad i_5 = v_5^3 = (e_3 - e_2)^3$$

$$i_3 = G_3 v_3 = G_3(-e_2) \qquad i_6 = G_6 v_6 = G_6(e_3)$$

ΝΟΜΟΣ ΡΕΥΜΑΤΩΝ KIRCHHOFF ΜΕ GAUSSIAN ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ



Ν.Ρ.Κ.: Για κάθε συγκεντρωμένο κύκλωμα, για κάθε Gaussian επιφάνεια $\mathcal{S}$, για κάθε χρόνο t, το αλγεβρικό άθροισμα όλων των ρευμάτων που εξέρχονται από την επιφάνεια $\mathcal{S}$ τον χρόνο t είναι μηδέν.

Ειδική Περίπτωση Ν.Ρ.Κ. (νόμος κόμβων):
Για κάθε συγκεντρωμένο κύκλωμα, για κάθε χρόνο t, το αλγεβρικό άθροισμα όλων των ρευμάτων που εξέρχονται από κάθε κόμβο είναι μηδέν.

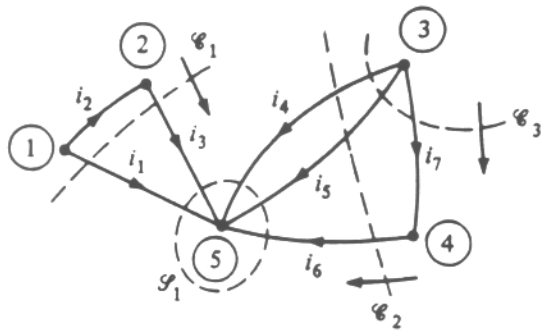
Παρατηρήσεις:

- Αρχή Διατήρησης Ηλεκτρικού Φορτίου $\Longrightarrow$ Ν.Ρ.Κ.
- Νόμος Επαγωγής Faraday $\Longrightarrow$ Ν.Τ.Κ.
- Ν.Τ.Κ. και Ν.Ρ.Κ. είναι οι δύο θεμελιώδεις αρχές της θεωρίας συγκεντρωμένων κυκλωμάτων.
- Ν.Τ.Κ. και Ν.Ρ.Κ. ισχύουν ανεξάρτητα από την φύση των στοιχείων του κυκλώματος. Αντανακλούν τις ιδιότητες διασύνδεσης.

ΝΟΜΟΣ ΡΕΥΜΑΤΩΝ KIRCHHOFF ΜΕ ΟΜΑΔΕΣ ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΥ

Σε ένα συνεκτικό γράφο $\mathcal{G}$, ένα υποσύνολο κλάδων $\mathcal{C}$ του $\mathcal{G}$ είναι **ομάδα διαχωρισμού (cut set)** εάνν: (1) αφαίρεση όλων των κλάδων της $\mathcal{C}$ αποσυνδέει τον γράφο, και (2) παραμονή οποιουδήποτε κλάδου της $\mathcal{C}$ αφήνει τον γράφο συνεκτικό.

- Κάθε ομάδα διαχωρισμού κατανέμει τους κόμβους του γράφου σε 2 υποσύνολα.
- Σε κάθε ομάδα διαχωρισμού αντιστοιχεί μια Gaussian επιφάνεια που τέμνει τους ίδιους κλάδους.
- Σε κάθε Gaussian επιφάνεια αντιστοιχεί είτε μια ομάδα διαχωρισμού είτε μια ένωση ομάδων διαχωρισμού.
- Σε κάθε ομάδα διαχωρισμού ορίζουμε μια αυθαίρετη φορά αναφοράς.



N.P.K. (νόμος ομάδων διαχωρισμού): Για κάθε συγκεντρωμένο κύκλωμα, για κάθε χρόνο t, το αλγεβρικό άθροισμα των ρευμάτων που σχετίζονται με κάθε ομάδα διαχωρισμού είναι μηδέν.

Θεώρημα: Οι τρεις μορφές του N.P.K., με (1) Gaussian επιφάνειες, (2) κόμβους, και (3) ομάδες διαχωρισμού, είναι ισοδύναμες.

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΓΡΑΦΩΝ

__Θεώρημα__: Για κάθε συνεκτικό προσανατολισμένο γράφο $\mathcal{G}$, με n κόμβους και b κλάδους, και για κάθε δένδρο $\mathcal{T}$ του $\mathcal{G}$:

① Υπάρχει μία μοναδική διαδρομή στο δένδρο μεταξύ δύο οποιωνδήποτε κόμβων.

② Υπάρχουν $\boxed{n-1 \text{ βλαστοί}}$ και $\boxed{l = b-n+1 \text{ σύνδεσμοι}}$

③ Κάθε βλαστός του $\mathcal{T}$ με μερικούς συνδέσμους ορίζει μόνο μία ομάδα διαχωρισμού (cut set), την __θεμελιώδη ομάδα διαχωρισμού__ που σχετίζεται με τον βλαστό.

④ Κάθε σύνδεσμος του $\mathcal{T}$ και η μοναδική διαδρομή στο δένδρο μεταξύ των δύο του κόμβων αποτελούν ένα μοναδικό βρόχο (loop), τον __θεμελιώδη βρόχο__ που σχετίζεται με τον σύνδεσμο.

__Συνέπεια I__:

$n-1$ βλαστοί (twigs)

$\Updownarrow$

$n-1$ θεμελ. ομάδες διαχωρ. (fundamental cut sets)

$\Updownarrow$

$n-1$ γραμμ. ανεξάρτητες εξισώσεις NPK.

__Συνέπεια II__:

$l = b-n+1$ σύνδεσμοι (links)

$\Updownarrow$

$b-n+1$ θεμελ. βρόχους (fundamental loops)

$\Updownarrow$

$b-n+1$ γραμμ. ανεξάρτητες εξισώσεις NTK.

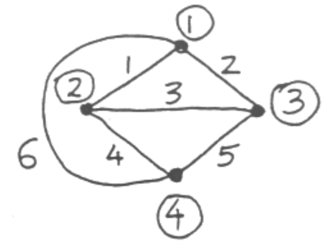
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Δίνεται Γράφος $\mathcal{G}$. Να βρεθούν όλες οι Ομάδες Διαχωρισμού, όλοι οι Βρόχοι, όλα τα Δένδρα και οι αντίστοιχες Θεμελ. Ομάδ. Διαχωρ.

Συνεκτικός Γράφος

$n=4 \quad b=6$

$\mathcal{G}$

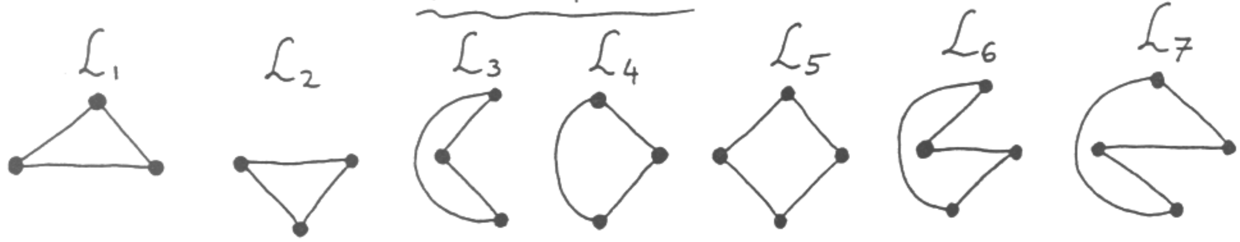


<u>7 Ομάδες Διαχωρισμού :</u> $C_1=\{1,2,6\}$, $C_2=\{1,3,4\}$

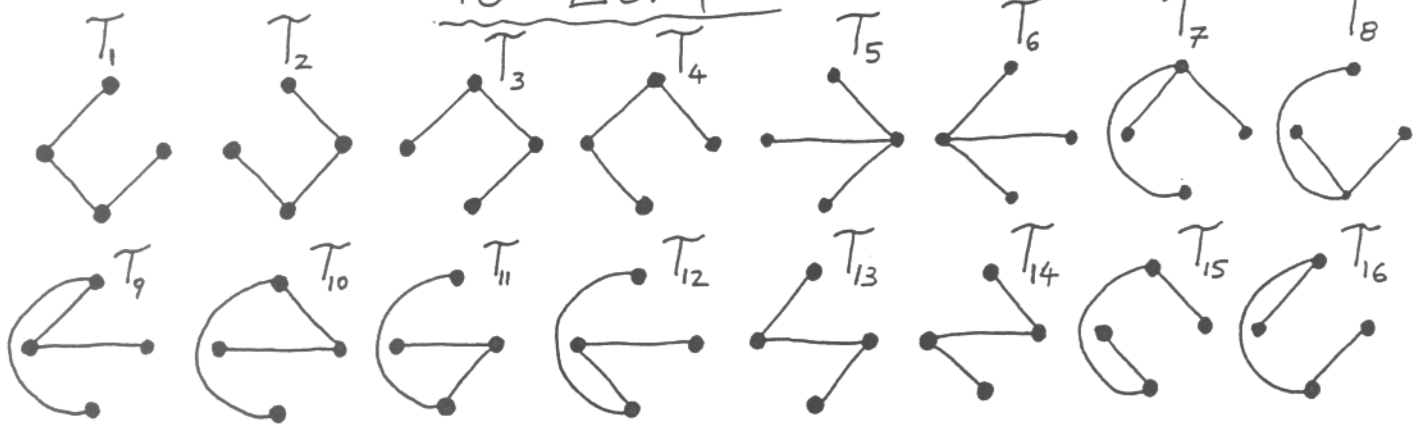
$C_3=\{2,3,5\}$, $C_4=\{4,5,6\}$

$C_7=\{1,2,4,5\}$, $C_5=\{2,3,4,6\}$, $C_6=\{1,3,5,6\}$

7 Βρόχοι



16 Δένδρα



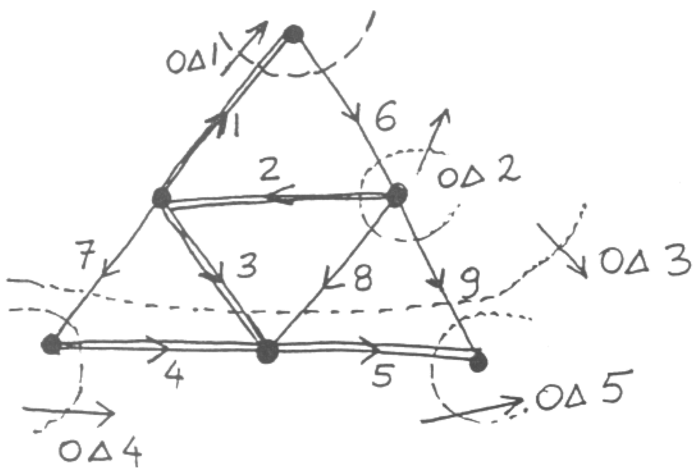
Δέντρο	T_5	T_6	T_7	T_8	T_1	T_9	T_{13}
3 Θεμ. Ομ. Διαχ.	C_1, C_2, C_4	C_1, C_3, C_4	C_2, C_3, C_4	C_1, C_2, C_3	C_1, C_3, C_5	C_3, C_4, C_7	C_1, C_4, C_5
3 Θεμ. Βρόχοι	L_1, L_2, L_4	L_1, L_2, L_3	L_1, L_4, L_3	L_2, L_3, L_4	L_2, L_3, L_5	L_1, L_3, L_6	L_1, L_2, L_6

<u>Παρατηρήσεις:</u>

* Υπάρχουν $\binom{7}{3}=140$ τριάδες ομάδων διαχωρισμού, αλλά μόνο 16 αντιστοιχούν σε δένδρα
* " " " βρόχων " " " " "
* Για 4 δένδρα: $T_5, T_6, T_7, T_8 \Longrightarrow$ (πίν. πρόσπτωσης) $A=Q$ (πίν. Θ.Ο.Δ.)
* Για 12 δένδρα: $T_1, T_2, T_3, T_4, T_9, T_{10}, \ldots, T_{16} \Longrightarrow A \neq Q$.

ΜΗΤΡΑ ΘΕΜΕΛΙΩΔΩΝ ΟΜΑΔΩΝ ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΥ

* Συνεκτικός Γράφος $\mathcal{G}$ Δικτύου και Δένδρο $\mathcal{T}=\{1,2,3,4,5\}$
  $n=6$ κόμβοι, $b=9$ κλάδοι, $n-1=5$ βλαστοί, $l=b-n+1=4$ σύνδεσμοι.



ΝΡΚ $\Longrightarrow$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{ΟΔ1}: & i_1-i_6=0 \\ \text{ΟΔ2}: & i_2-i_6+i_8+i_9=0 \\ \text{ΟΔ2}: & i_3+i_7+i_8+i_9=0 \\ \text{ΟΔ4}: & i_4-i_7=0 \\ \text{ΟΔ5}: & i_5+i_9=0 \end{array}\right\} \rightarrow$$

* Εξισώσεις ΝΡΚ με ρεύματα κλάδων:

$$\begin{array}{c} n-1=5 \\ \text{Θ.Ο.Δ.} \end{array}\left\{ \underbrace{\left[\begin{array}{ccccc|cccc} 1&0&0&0&0&-1&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&-1&0&1&1 \\ 0&0&1&0&0&0&1&1&1 \\ 0&0&0&1&0&0&-1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&1 \end{array}\right]}_{\substack{n-1=5 \text{ βλαστοί} \qquad l=b-n+1=4 \text{ σύνδεσμοι}}} \right. \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ \vdots \\ i_8 \\ i_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \qquad \text{Ν.Ρ.Κ.} \quad \boxed{Qi=0}$$

μήτρα Θ.Ο.Δ. $\quad Q=[\,1_{n-1\times n-1} \,\vdots\, Q_l\,]$

$$Q=[q_{jk}] \,, \qquad q_{jk}=\begin{cases} +1, & \text{κλάδος k ανήκει στην Ο.Δ. j και έχει ίδιο προσανατολισμό.} \\ -1, & \text{κλάδος k ανήκει στην Ο.Δ. j και έχει αντίθετο προσανατολισμό.} \\ 0, & \text{κλάδος k δεν ανήκει στην Θ.Δ. j.} \end{cases}$$

* Εξισώσεις ΝΤΚ με τάσεις βλαστών:

- Τάσεις Βλαστών: $V_{tk}=V_k \;, k=1,\dots,n-1=5$
- ΝΤΚ στους $l=4$ θεμελιώδεις βρόχους

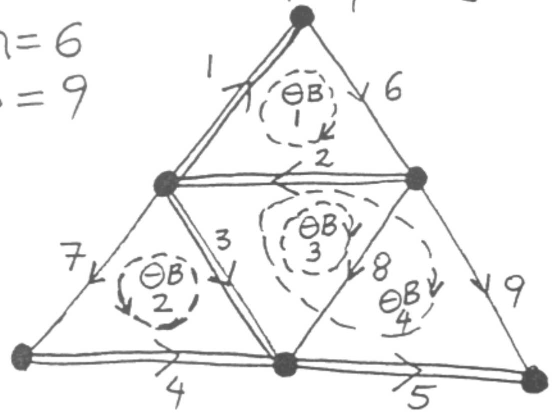
$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow V_6=-V_1-V_2=-V_{t1}-V_{t2} \\ V_7=V_3-V_4=V_{t3}-V_{t4} \\ V_8=V_2+V_3=V_{t2}+V_{t3} \\ V_9=V_2+V_3+V_5=V_{t2}+V_{t3}+V_{t5} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_{n-1\times n-1} \\ \hdashline Q_l^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{t1} \\ \vdots \\ V_{t5} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{V=Q^T V_t} \qquad \text{Ν.Τ.Κ.}$$

ΜΗΤΡΑ ΘΕΜΕΛΙΩΔΩΝ ΒΡΟΧΩΝ

* Συνεκτικός Γράφος $\mathcal{G}$ Δικτύου και Δένδρο $\mathcal{T}=\{1,2,3,4,5\}$.

$n=6$
$b=9$



NTK $\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned}
&\Theta B1: \quad V_6+V_2+V_1=0\\
&\Theta B2: \quad V_7+V_4-V_3=0\\
&\Theta B3: \quad V_8-V_3-V_2=0\\
&\Theta B4: \quad V_9-V_5-V_3-V_2=0
\end{aligned}\right\} \rightarrow$$

* Εξισώσεις NTK με τάσεις κλάδων:

$$\underbrace{\begin{matrix} \ell=4 \\ \Theta.B. \end{matrix}}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right. \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_8 \\ V_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{N.T.K.} \quad \boxed{BV=0}$$

Πρώτες 5 στήλες: $n-1=5$ βλαστοί · τελευταίες 4 στήλες: $\ell=b-n+1=4$ σύνδεσμοι

μήτρα Θ.Β. $\quad B=\left[B_t \,\vdots\, I_{\ell\times\ell}\right]$

$$B=[b_{jk}], \quad b_{jk}=\begin{cases} +1, & \text{κλάδος k ανήκει στον Θ.Β. j και έχει ίδιο προσανατολισμό.} \\ -1, & \text{κλάδος k ανήκει στον Θ.Β. j και έχει αντίθετο προσανατολισμό.} \\ 0, & \text{κλάδος k δεν ανήκει στον Θ.Β. j.} \end{cases}$$

* Εξισώσεις N.P.K. με ρεύματα συνδέσμων:

- Ρεύματα Συνδέσμων:
  $i_{\ell_1}=i_6, \quad i_{\ell_2}=i_7, \quad i_{\ell_3}=i_8, \quad i_{\ell_4}=i_9$
- NPK στις $n-1=5$ Θ.Ο.Δ. $\rightarrow$

$$\left.\begin{aligned}
i_1 &= i_{\ell_1}\\
i_2 &= i_{\ell_1}-i_{\ell_3}-i_{\ell_4}\\
i_3 &= -i_{\ell_2}-i_{\ell_3}-i_{\ell_4}\\
i_4 &= i_{\ell_2}\\
i_5 &= -i_{\ell_4}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_t^T \\ \hdashline I_{\ell\times\ell} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{\ell_1} \\ \vdots \\ i_{\ell_4} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{i=B^T i_\ell}$$

NPK

ΜΕΘΟΔΟΙ ΚΟΜΒΩΝ, ΟΜΑΔΩΝ ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΥ, ΒΡΟΧΩΝ

* Δυαδικότητα μεταξύ Μεθόδων Βρόχων και Ομαδ. Διαχωρ.

Μέθοδος/Ανάλυση Βρόχων	Μέθοδος/Ανάλυση Ομάδων Διαχωρισμού
Σύνδεσμος	Βλαστός
Θεμελιώδης Βρόχος	Θεμελιώδης Ομάδα Διαχωρισμού
Ρεύμα Συνδέσμου, i_ℓ	Τάση Βλαστού, v_t
Μήτρα Θεμελ. Βρόχων, B	Μήτρα Θεμελ. Ομαδ. Διαχωρ., Q

$$\boxed{BQ^T = 0}\,, \quad B_t = -Q_\ell^T$$

* Εξισώσεις Kirchhoff βασισμένες σε Κόμβους, Θεμελ. Ομαδ. Διαχωρ., και Θεμελ. Βρόχους.

Μήτρα Γράφου Δικτύου

	A	Q	B
N.P.K.	$Ai=0$	$Qi=0$	$i=B^T i_\ell$
N.T.K.	$v=A^T e$	$v=Q^T v_t$	$Bv=0$

* Περιγραφικές Εξισώσεις Στοιχείων Κλάδων:

$$h\left(v, i, \frac{dv}{dt}, \frac{di}{dt}, t\right) = 0$$

* Μέθοδοι (Εξισώσεις) Αραιού Πίνακα:

Μέθοδος Κόμβων Αραιού Πίνακα: $Ai=0$, $v=A^T e$, $h(\cdot)=0$.

" Θ. Ο. Δ. " " : $Qi=0$, $v=Q^T v_t$, $h(\cdot)=0$

" Θ. Β. " " : $i=B^T i_\ell$, $Bv=0$, $h(\cdot)=0$

ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΡΑΙΟΥ ΠΙΝΑΚΑ (Tableau Analysis)

* Εξισώσεις Στοιχείων Κλάδων:

- Μη-γραμμικό χρονικά-μεταβαλλόμενο κύκλωμα:

$$h\left(v, i, \frac{dv}{dt}, \frac{di}{dt}, t\right) = 0$$

- Γραμμικό χρονικά-μεταβαλλόμενο κύκλωμα:

$$\left[M_o(t)\frac{d}{dt} + M_1(t)\right]v(t) + \left[N_o(t)\frac{d}{dt} + N_1(t)\right]i(t) = \mathcal{U}_s(t)$$

& αρχικές συνθήκες από στοιχεία χωρητικότητας/επαγωγής.

- Γραμμικό χρονικά-αμετάβλητο (Γ.Χ.Α.) κύκλωμα:

στον ΧΡΟΝΟ: $\left(M_o\frac{d}{dt} + M_1\right)v(t) + \left(N_o\frac{d}{dt} + N_1\right)i(t) = \mathcal{U}_s(t)$, & αρχ. συνθήκες

$\downarrow \mathcal{L}$ (μετ/σμός Laplace)

στην ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ: $\underbrace{(M_o s + M_1)}_{=M(s)}V(s) + \underbrace{(N_o s + N_1)}_{=N(s)}I(s) = \mathcal{U}_s(s) + \mathcal{U}_i$

$M_o, M_1, N_o, N_1 \in \mathbb{R}^{b\times b}$, $\mathcal{U}_s(t)$ = διάνυσμα σημάτων εισόδου (ανεξ. πηγές τάσης/ρεύμ.)

* Εξισώσεις Αραιού Πίνακα με Κόμβους (Γ.Χ.Α στοιχεία, στην Συχνότητα)

$$\left.\begin{aligned} A\,I(s) &= 0 \\ V(s) - A^T E(s) &= 0 \\ M(s)V(s) + N(s)I(s) &= \mathcal{U}_s(s) + \mathcal{U}_i \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} O & O & A \\ -A^T & 1_{b\times b} & O \\ O & M & N \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E \\ V \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O \\ O \\ \mathcal{U}_s + \mathcal{U}_i \end{bmatrix}$$

(2b+n-1 εξισώσεις)

* Εξισ. Αραιού Πίνακα με Θεμελ. Ομάδ. Διαχωρ. (Γ.Χ.Α. στοιχεία, στην Συχνότητα

$$\left.\begin{aligned} Q\,I(s) &= 0 \\ V(s) - Q^T V_t(s) &= 0 \\ M(s)V(s) + N(s)I(s) &= \mathcal{U}_s(s) + \mathcal{U}_i \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} O & O & Q \\ -Q^T & 1_{b\times b} & O \\ O & M & N \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_t \\ V \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O \\ O \\ \mathcal{U}_s + \mathcal{U}_i \end{bmatrix}$$

(2b+n-1 εξισώσεις)

* Εξισ. Αραιού Πίνακα με Θεμελ. Βρόχους (Γ.Χ.Α. στοιχεία, στην Συχνότητα)

$$\left.\begin{aligned} I(s) - B^T I_\ell(s) &= 0 \\ B\,V(s) &= 0 \\ M(s)V(s) + N(s)I(s) &= \mathcal{U}_s(s) + \mathcal{U}_i \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -B^T & O & 1_{b\times b} \\ O & B & O \\ O & M & N \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_\ell \\ V \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O \\ O \\ \mathcal{U}_s + \mathcal{U}_i \end{bmatrix}$$

(3b-n+1 εξισώσεις)

ΑΠΛΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΚΟΜΒΩΝ (Node Analysis)

(Περιορισμοί: Μόνο στοιχεία ελεγχόμενα από τάση: $i=f(v)$)

* Εξισώσεις Αραιού Πίνακα $\Longrightarrow$ Εξισώσεις Κόμβων

(Γ.Χ.Α. στοιχεία στην Συχνότητα)

$$\left.\begin{array}{l} AI=0 \\ V=A^T E \\ MV+NI=U_s+U_i \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} A=[A_p \,\vdots\, A_J] \\ I=\begin{bmatrix} I_p \\ I_J \end{bmatrix}^T, \; I_J: \text{ρεύματα ανεξ. Π.Ρ.}, \; I_p: \text{'' άλλων στοιχείων} \\ M_p V_p + N_p I_p = U_i \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A_p I_p = -A_J I_J \\ Y_p V_p - I_p = I_i \end{array}$$

$Y_p \equiv -N_p^{-1} M_p$ = πίνακας συνθ. αγωγιμοτήτων κλάδων παθητικών στοιχείων.
(branch admittance matrix)

$$\Rightarrow \boxed{\underbrace{\left(A_p Y_p A_p^T\right)}_{\equiv Y_n} E = -A_J I_J + A_p I_i} \quad \left.\right\} \begin{array}{c} n-1 \\ \text{Εξισώσεις} \\ \text{Κόμβων} \end{array}$$

Y_n: πίνακας συνθ. αγωγιμ. κόμβων (node admittance matrix)

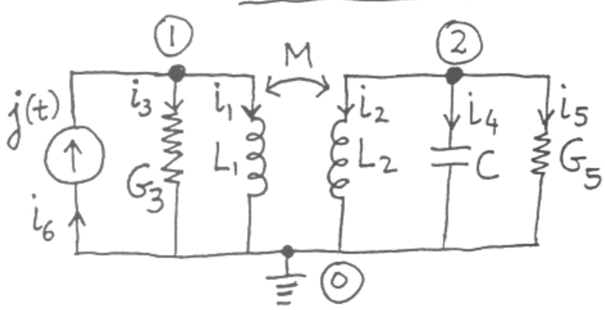
E: τάσεις κόμβων

I_J: Ανεξάρτ. Πηγές Ρεύμ.

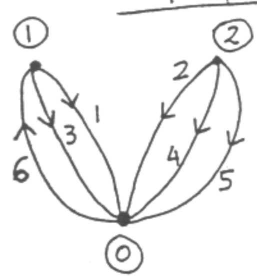
I_i: Αρχικές Συνθήκες.

* Παράδειγμα

Κύκλωμα



Γράφος



$$A=\left[\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}}_{A_p} \;\vdots\; \underbrace{\begin{matrix} -1 \\ 0 \end{matrix}}_{A_J}\right]$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\Gamma_{11}}{s} & \frac{\Gamma_{12}}{s} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\Gamma_{12}}{s} & \frac{\Gamma_{22}}{s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & sC & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_5 \end{bmatrix}}_{=Y_p} \underbrace{\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix}}_{V_p} - \underbrace{\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix}}_{I_p} = \underbrace{\begin{bmatrix} -i_1(0)/s \\ -i_2(0)/s \\ 0 \\ C V_4(0) \\ 0 \end{bmatrix}}_{I_i}, \quad \underbrace{\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix}^{-1}}_{\text{αντίστροφος πίνακας επαγωγής}}$$

Εξισ. Κόμβων

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\Gamma_{11}}{s}+G_3 & \frac{\Gamma_{12}}{s} \\ \frac{\Gamma_{12}}{s} & \frac{\Gamma_{22}}{s}+sC+G_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -i_1(0)/s \\ -i_2(0)/s + C V_4(0) \end{bmatrix}$$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΘΕΜΕΛΙΩΔΩΝ ΒΡΟΧΩΝ (Fundam. Loop Analysis)

(Περιορισμοί: Μόνο στοιχεία ελεγχόμενα από ρεύμα: $v=f(i)$)

* Εξισώσεις Αραιού Πίνακα ⟹ Εξισώσεις Θεμελ. Βρόχων

(Γ.Χ.Α. στοιχεία στην Συχνότητα)

$$\left.\begin{aligned} I &= B^T I_\ell \\ BV &= 0 \\ MV + NI &= U_s + U_i \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &I = B^T I_\ell\,,\ BV = 0 \\ &V - Z_b I = V_s + V_i \end{aligned}$$

$Z_b \equiv -M^{-1}N =$ πίνακας συνθετων αντιστάσεων κλάδων (branch impedance matrix)

$$\Rightarrow \boxed{\underbrace{\left(B Z_b B^T\right)}_{\equiv Z_\ell} I_\ell = -BV_s - BV_i} \Bigg\}\ b-n+1 \text{ Εξισώσεις Βρόχων}$$

Z_ℓ: πίνακας συνθ. αντιστ. βρόχων (loop impedance matrix)

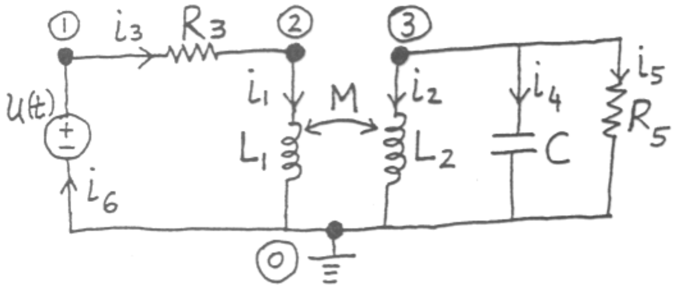
I_ℓ: ρεύμ. συνδέσμων

V_s: Ανεξάρτ. Πηγές Τάσης

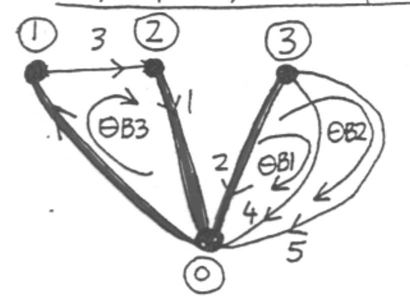
V_i: Αρχικές Συνθήκες

* Παράδειγμα

Κύκλωμα



Γράφος, Δένδρο (=)



$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{bmatrix}}_{V} - \underbrace{\begin{bmatrix} sL_1 & sM & 0 & 0 & 0 & 0 \\ sM & sL_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/sC & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{Z_b} \underbrace{\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix}}_{I} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ U \end{bmatrix}}_{V_s} + \underbrace{\begin{bmatrix} -L_1 i_1(0) - M i_2(0) \\ -M i_1(0) - L_2 i_2(0) \\ 0 \\ V_4(0)/s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{V_i}$$

⟹ Εξισώσεις Θεμελ. Βρόχων.

$$\boxed{\begin{bmatrix} sL_2 + \frac{1}{sC} & sL_2 & -sM \\ sL_2 & sL_2 + R_5 & -sM \\ -sM & -sM & sL_1 + R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_4 \\ I_5 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -U \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M i_1(0) + L_2 i_2(0) + V_4(0)/s \\ M i_1(0) + L_2 i_2(0) \\ -L_1 i_1(0) - M i_2(0) \end{bmatrix}}$$

ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΚΟΜΒΩΝ (Modified Node Analysis)

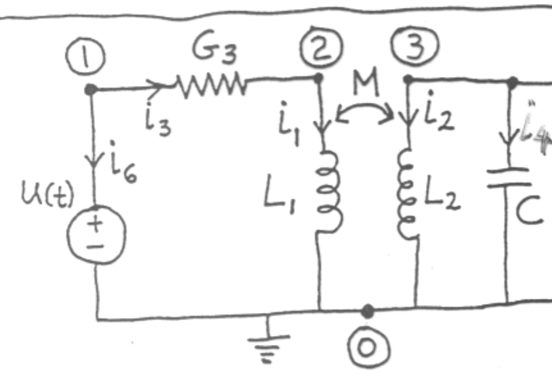
Δεδομένα: Διάγραμμα κυκλώματος με αρίθμηση κόμβων (π.χ., 0,1,2,..,n-1), φορές ρευμάτων, και εξισώσεις στοιχείων κλάδων.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ:
- Επιλογή κόμβου αναφοράς, π.χ. ⓪, και σχεδίαση συνεκτικού προσανατολισμένου γράφου.
- Γιά $k=1,2,\ldots,n-1$: Ν.Ρ.Κ. για κόμβο ⓚ χρησιμοποιώντας τις τάσεις κόμβων ως μεταβλητές. Εάν ένας ή περισσότεροι κλάδοι που συνδέονται με τον κόμβο ⓚ περιέχουν επαγωγείς ή άλλα στοιχεία που είναι μη-ελεγχόμενα από τάση, τότε το αντίστοιχο ρεύμα κλάδου εισέρχεται στην εξίσωση κόμβου και η αντίστοιχη εξίσωση στοιχείου συμπεριλαμβάνεται με τις n-1 εξισώσεις κόμβων.

Άγνωστοι: n-1 τάσεις κόμβων και ρεύματα μόνο των κλάδων με επαγωγείς ή στοιχεία μη-ελεγχόμενα από τάση ($i \neq f(v)$).

Περιορισμοί: κανείς! (η μέθοδος αναλύει οποιοδήποτε δυναμικό κύκλωμα)

ΚΥΚΛΩΜΑ με Γ.Χ.Α. στοιχεία



Τροπ. Μέθ. Κόμβων: 6 εξισώσεις (άγνωστοι: $e_1, e_2, e_3, i_1, i_2, i_6$)
Μέθ. Αραιού Πίνακα: $2b+n-1=15$ εξισώσεις (άγνωστοι: $e_1, e_2, e_3, v_1, \ldots, v_6, i_1, \ldots, i_6$)

		στον ΧΡΟΝΟ	στην ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ
Εξισ. Κόμβων (Ν.Ρ.Κ.)	①:	$G_3 e_1 - G_3 e_2 + i_6 = 0$	$G_3 E_1(s) - G_3 E_2(s) + I_6(s) = 0$
	②:	$-G_3 e_1 + G_3 e_2 + i_1 = 0$	$-G_3 E_1(s) + G_3 E_2(s) + I_1(s) = 0$
	③:	$C\frac{de_3}{dt} + G_5 e_3 + i_2 = 0$	$sC E_3(s) + G_5 E_3(s) + I_2(s) = C e_3(0)$
Συζευγμένοι Επαγωγείς		$-e_2 + L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} = 0$	$-E_2(s) + sL_1 I_1(s) + sM I_2(s) = L_1 i_1(0) + M i_2(0)$
		$-e_3 + M\frac{di_1}{dt} + L_2\frac{di_2}{dt} = 0$	$-E_3(s) + sM I_1(s) + sL_2 I_2(s) = M i_1(0) + L_2 i_2(0)$
Ανεξ. Πηγή Τάσης		$e_1 = u(t)$	$E_1(s) = U(s)$

ΑΠΛΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΓΙΑ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ (STATE EQUATIONS)

* Στόχος: Συστηματική εύρεση των εξισώσεων κατάστασης και εξόδου (για Γ.Χ.Α. κυκλώματα)

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) &= C\,x(t) + D\,u(t) \end{aligned}}$$

u = είσοδος
y = έξοδος

x = διάνυσμα κατάστασης = [τάση (φορτίο) χωρητικ., ρεύμα (ροή) επαγωγών]

* Αλγόριθμος: ① Επιλογή ενός κανονικού δένδρου (proper tree) που περιλαμβάνει όλες τις χωρητικότητες και όχι τις επαγωγές.

② Μεταβλητές κατάστασης (state variables) επιλέγονται οι τάσεις χωρητικοτήτων των κλαδιών και τα ρεύματα επαγωγών των συνδέσμων. (π.χ. $x = [v_{C1}, v_{C2}, i_L]^T$)

③ Ν.Ρ.Κ. για κάθε θεμελ. ομάδα διαχωρισμού οριζόμενη από χωρητικ. κλαδί:

$$C_1 \frac{dv_{C1}}{dt} = i_1 - i_L = \frac{v_s - v_{C1}}{R_1} - i_L \quad , \quad C_2 \frac{dv_{C2}}{dt} = i_L - g_m v_{C1} - \frac{v_{C2}}{R_2} .$$

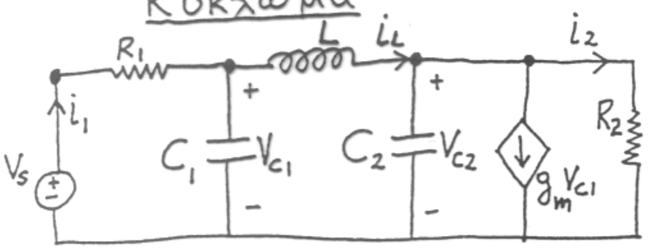
④ Ν.Τ.Κ. για κάθε θεμελιώδη βρόχο οριζόμενο από επαγωγή συνδέσμου:

$$L \frac{di_L}{dt} = v_{C1} - v_{C2} .$$

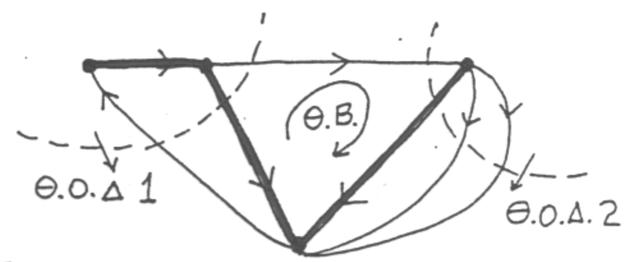
⑤ Δεξιά πλευρά των εξισώσεων εκφράζεται ως συνάρτηση μόνο των μεταβλητών κατάστασης ή/και των εισόδων.

* Παράδειγμα:

Κύκλωμα



Δένδρο (═)



$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{dv_{C1}}{dt} \\ \frac{dv_{C2}}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{bmatrix}}_{\dot{x}} \underset{=}{=} \underbrace{\begin{bmatrix} -1/R_1C_1 & 0 & -1/C_1 \\ -g_m/C_2 & -1/C_2R_2 & 1/C_2 \\ 1/L & -1/L & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \\ i_L \end{bmatrix}}_{x} \underset{+}{+} \underbrace{\begin{bmatrix} 1/R_1C_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{v_s}_{u}$$

(εάν $y = i_1$) →

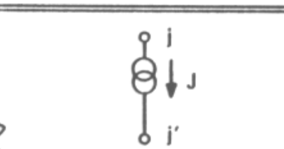
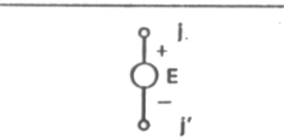
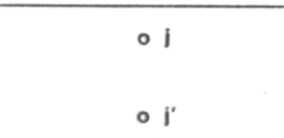
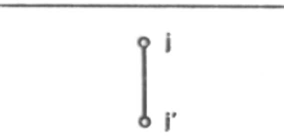
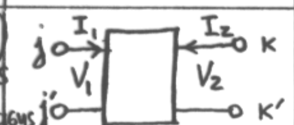
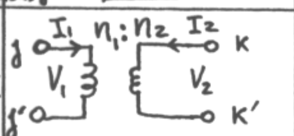
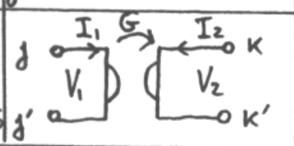
$$\underbrace{y = \left[\frac{-1}{R_1} \;\; 0 \;\; 0\right] \begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \\ i_L \end{bmatrix} + \frac{1}{R_1} v_s}_{y \,=\, C \quad x \,+\, D\,u}$$

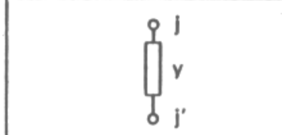
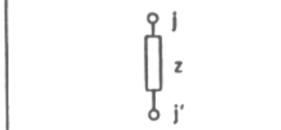
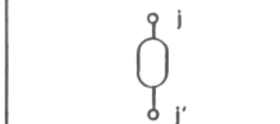
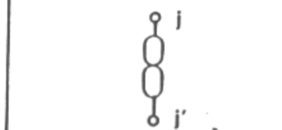
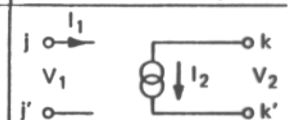
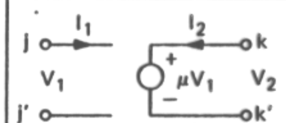
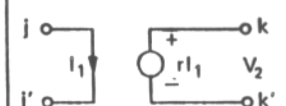
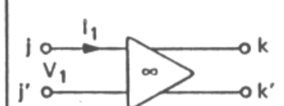
* Περιορισμοί Αλγόριθμου:

— οι χωρητικότητες του κυκλώματος δεν σχηματίζουν βρόχους.
— οι επαγωγές " " δεν " ομάδες διαχωρισμού

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΙΔΑΝΙΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΓΙΑ ΜΕΘΟΔΟ ΑΡΑΙΟΥ ΠΙΝΑΚΑ

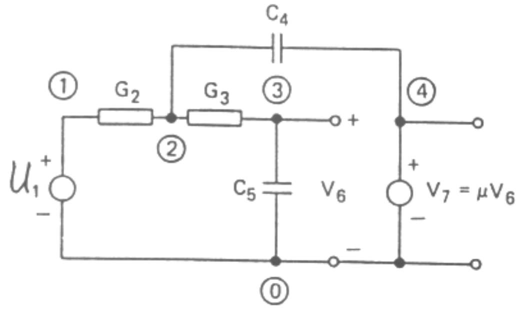
Στοιχείο Σύμβολο Εξισώσεις

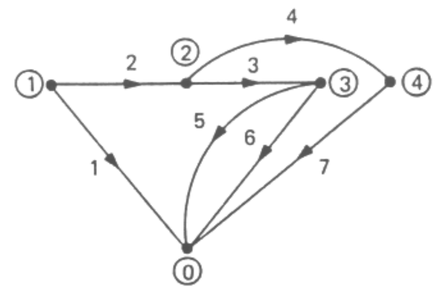
ELEMENT	SYMBOL	CONSTITUTIVE EQUATIONS
(CURRENT SOURCE) Ανεξ. Πηγή Ρ.		$I = J$
(VOLTAGE SOURCE) Ανεξ. Πηγή Τ.		$V = E$
OPEN CIRCUIT		$I = 0$
SHORT CIRCUT		$V = 0$
(Impedance) CONVERTER Μετατροπέας Σύνθ. Αντίστασης		$\begin{bmatrix}1 & -K_1\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1\\V_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & K_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1\\I_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$
ΙΔΑΝΙΚΟΣ ΜΕΤ/ΣΤΗΣ		$\begin{bmatrix}n_2 & -n_1\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1\\V_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\n_1 & n_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1\\I_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$
(GYRATOR) Ιδανικός Γυράτορας		$\begin{bmatrix}0 & -G\\G & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1\\V_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1\\I_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

ELEMENT	SYMBOL	CONSTITUTIVE EQUATIONS
ADMITTANCE		$yV - I = 0$
IMPEDANCE		$V - zI = 0$
NULLATOR		$I = 0$ $V = 0$
NORATOR		I, V ARBITRARY (NO CONSTITUTIVE EQUATIONS)
VCT	 $I_1 = 0;\ I_2 = gV_1$	$\begin{bmatrix}0 & 0\\g & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1\\V_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1\\I_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$
VVT	 $I_1 = 0;\ V_2 = \mu V_1$	$\begin{bmatrix}0 & 0\\\mu & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1\\V_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1\\I_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$
CCT	 $V_1 = 0;\ I_2 = \alpha I_1$	$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1\\V_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\\alpha & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1\\I_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$
CVT	 $V_1 = 0;\ V_2 = rI_1$	$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1\\V_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\r & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1\\I_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$
OPAMP	 $V_1 = 0;\ I_1 = 0$	$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1\\V_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1\\I_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΡΑΙΟΥ ΠΙΝΑΚΑ (με 1 γράφο): ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

- Κύκλωμα   Γράφος





- Μήτρα Πρόσπτωσης

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Εξισώσεις Στοιχείων Κλάδων (αρχικές συνθήκες = 0)

$$\begin{aligned} V_1 &= U_1 \\ G_2 V_2 - I_2 &= 0 \\ G_3 V_3 - I_3 &= 0 \\ sC_4 V_4 - I_4 &= 0 \\ sC_5 V_5 - I_5 &= 0 \\ I_6 &= 0 \\ \mu V_6 - V_7 &= 0. \end{aligned} \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & sC_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & sC_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$MV + NI = W$$

- Εξισώσεις Αραιού Πίνακα

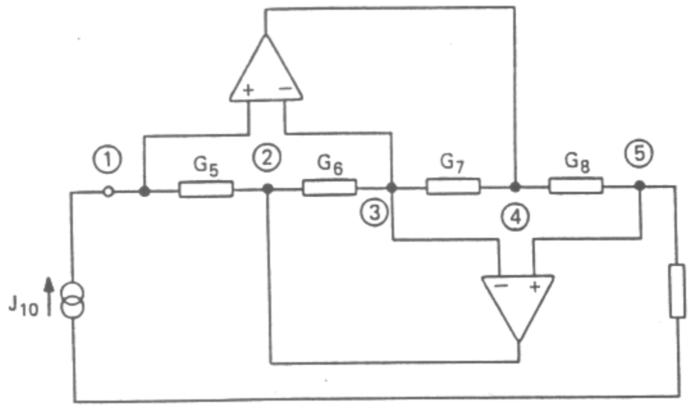
Μεταβλητές: $\underbrace{\{V_1, V_2, \ldots, V_7\}}$ Τάσεις Κλάδων, $\{I_1, I_2, \ldots, I_7\}$ Ρεύματα Κλάδων, $\{E_1, E_2, \ldots, E_4\}$ Τάσεις Κόμβων

$$\left.\begin{aligned} \text{N.T.K.:}\quad & V - A^T E = 0 \\ \text{E.Σ.K.:}\quad & MV + NI = 0 \\ \text{N.P.K.:}\quad & AI = 0 \end{aligned}\right\} \iff \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} 1_{7\times7} & O & -A^T \\ \hline M & N & O \\ \hline O & A & O \end{array}\right]}_{T} \left[\begin{array}{c} V \\ \hline I \\ \hline E \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} O \\ \hline W \\ \hline O \end{array}\right]$$

Πίνακας T: μέγεθος = 18x18, 39 ≠ 0, πυκνότητα = 12%.

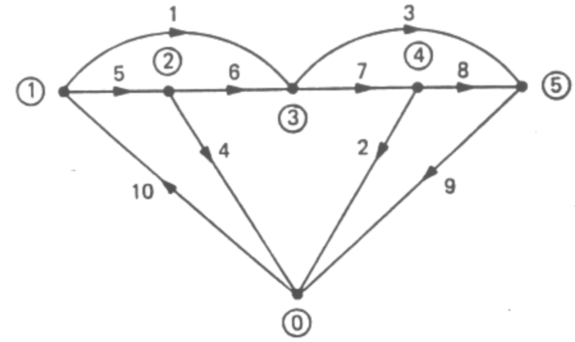
ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΡΑΙΟΥ ΠΙΝΑΚΑ (με 1 γράφο): ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

- ΚΥΚΛΩΜΑ
General. Impedance Converter



Γενικ. Μετατροπέας Σύνθετης Αντίστασης

ΓΡΑΦΟΣ



- Μήτρα Πρόσπτωσης:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Εξισώσεις Αραιού Πίνακα:

Μεταβλητές: $\underbrace{\{V_1, V_2, \dots, V_{10}\}}_{\text{Τάσεις Κλάδων}}$, $\underbrace{\{I_1, I_2, \dots, I_{10}\}}_{\text{Ρεύματα Κλάδων}}$, $\underbrace{\{E_1, E_2, \dots, E_5\}}_{\text{Τάσεις Κόμβων}}$

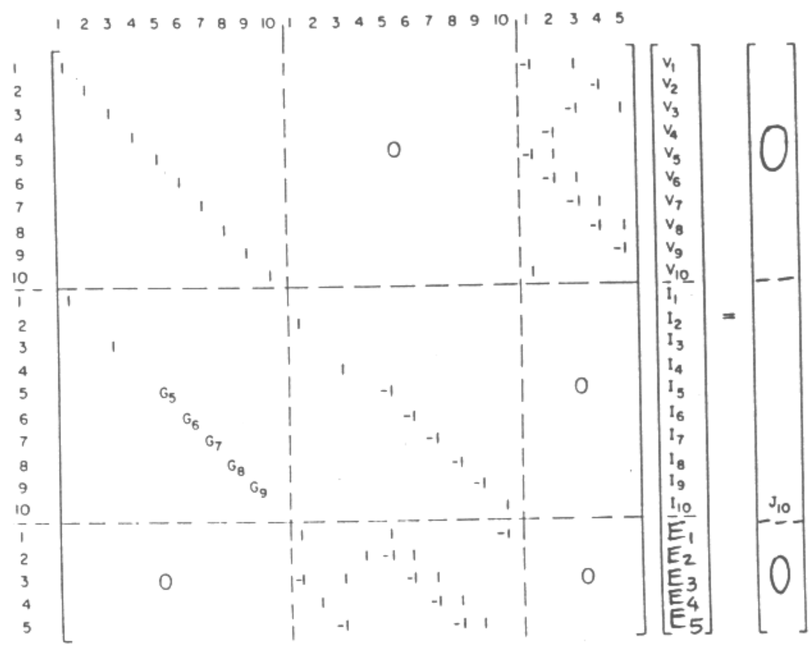
$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 & -A^T \\ M & N & 0 \\ 0 & A & 0 \end{bmatrix}}_{T} \begin{bmatrix} V \\ I \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ W \\ 0 \end{bmatrix}$$

Πίνακας T:

μέγεθος = 25x25

στοιχείων≠0 = 57

πυκνότητα = 9.1%.



ΚΑΝΟΝΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ Ι-ΓΡΑΦΟΥ ΚΑΙ V-ΓΡΑΦΟΥ

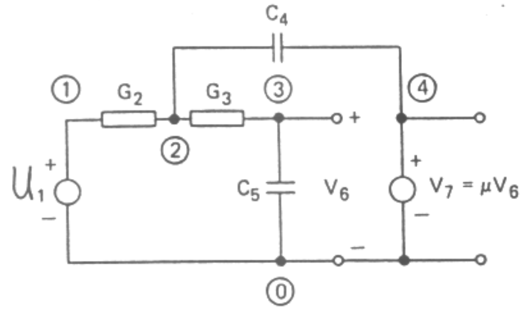
1. Εάν ρεύμα κλάδου δεν υπεισέρχεται στις Εξισ. Στοιχείων και η γνώση του δεν ενδιαφέρει → ο κλάδος παραλείπεται και οι ακροδέκτες του ταυτίζονται στον I-γράφο.
2. Εάν ρεύμα κλάδου $=0$ → ο κλάδος παραλείπεται και οι ακροδέκτες του διαχωρίζονται στον I-γράφο.
3. Εάν τάση κλάδου δεν υπεισέρχεται στις εξισ. στοιχείων και η γνώση της δεν ενδιαφέρει → ο κλάδος παραλείπεται και οι ακροδέκτες του διαχωρίζονται στον V-γράφο.
4. Εάν τάση κλάδου $=0$ → ο κλάδος παραλείπεται και οι ακροδέκτες του ταυτίζονται στον V-γράφο.

ΙΔΕΑΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΤΟΥΣ ΣΤΟΝ **I**-ΓΡΑΦΟ ΚΑΙ ΤΟΝ **V**-ΓΡΑΦΟ

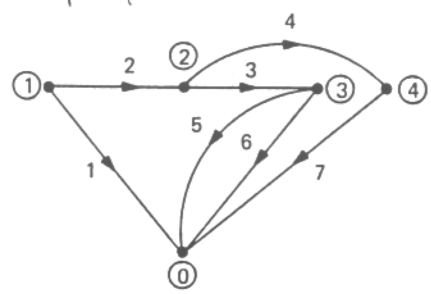
ΣΤΟΙΧΕΙΟ	ΣΥΜΒΟΛΟ	Ι-ΓΡΑΦΟΣ	V-ΓΡΑΦΟΣ	ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗ ΣΧΕΣΗ
Ανεξάρτητη πηγή έντασης	j j'	j j'	j j'	$I = J$
Ανεξάρτητη πηγή τάσης	+ j j'	j≡j'	j j'	$V=E$
Ανοικτοκύκλωμα	j j'	j j'	j j'	—
Βραχυκύκλωμα	j j'	j j'	j≡j'	—
Σύνθετη αγωγιμότητα	j j'	j j'	j j'	$YV-I=0$
Σύνθετη Αντίσταση	j j'	j j'	j j'	$V-ZI=0$
Μηδενιστής	j j'	j j'	j≡j'	—
Αρνητής	j j'	j≡j'	j j'	—
Μετατροπέας τάσης σε ρεύμα	j k j' k'	j k j' k'	j k j' k'	$gV-I=0$
Μετατροπέας τάσης σε τάση	j + k j' k'	j k≡k' j'	j k j' k'	$\mu V_1-V_2 = 0$
Μετατροπέας ρεύματος σε ρεύμα	j k j' k'	j k j' k'	j k≡k' j'	$\alpha I_1-I_2 = 0$
Μετατροπέας ρεύματος σε τάση	j + k j' k'	j k≡k' j'	j≡j' k k'	$rI-V=0$
Τελεστικός Ενισχυτής	j k j' k'	j k≡k' j'	j≡j' k k'	—

ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΡΑΙΟΥ ΠΙΝΑΚΑ με 2 γράφους: ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

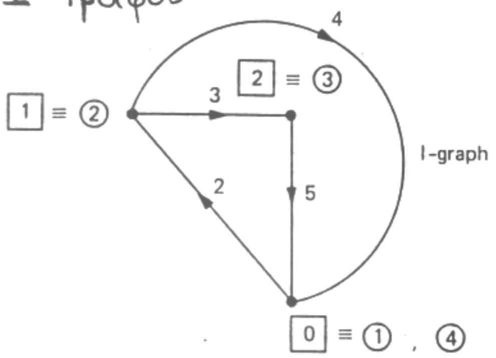
- Κύκλωμα



Γράφος



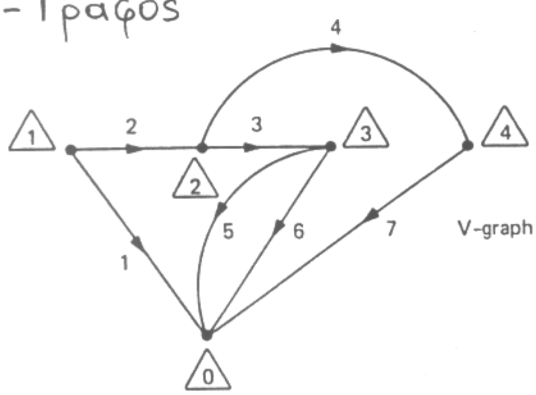
- I-Γράφος



μήτρα πρόσπτωσης I-γράφου

$$A_i = \begin{array}{c} \\ \boxed{1} \\ \boxed{2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad A_i$$

- V-Γράφος



μήτρα πρόσπτωσης V-γράφου

$$A_v = \begin{array}{c} \\ \triangle 1 \\ \triangle 2 \\ \triangle 3 \\ \triangle 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad A_v$$

- Εξισ. Αραιού Πίνακα

V = τάσεις κλάδων V-γράφου
I = ρεύματα κλάδων I-γράφου
E = τάσεις κόμβων V-γράφου

ΝΤΚ (V-γράφος): $V = A_v^T E$

Ε.Σ.Κ: $MV + NI = W$

ΝΡΚ (I-γράφος): $A_i I = 0$

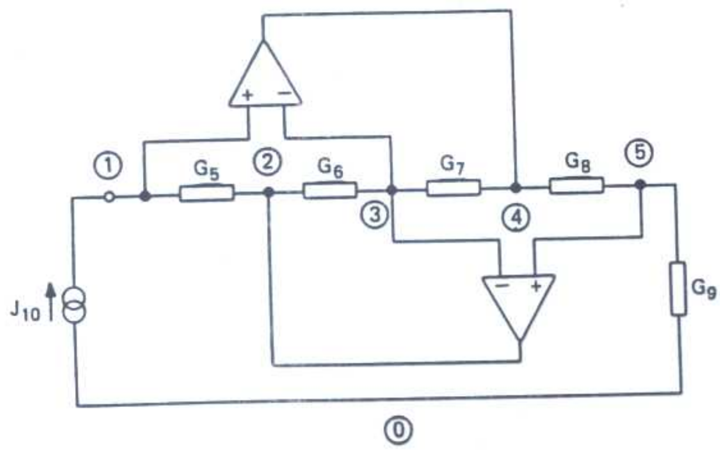
$$\begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 & -A_v^T \\ M & N & 0 \\ 0 & A_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ I \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ W \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccccccc|cccc|cccc}
1 & & & & & & & & & & & -1 & & & \\
 & 1 & & & & & & & & & & -1 & 1 & & \\
 & & 1 & & & & & & & & & & -1 & 1 & \\
 & & & 1 & & & & & & & & & -1 & & 1 \\
 & & & & 1 & & & & & & & & & -1 & \\
 & & & & & 1 & & & & & & & & -1 & \\
 & & & & & & 1 & & & & & & & & -1 \\
\hline
1 & & & & & & & & & & & & & & \\
 & G_2 & & & & & & -1 & & & & & & & \\
 & & G_3 & & & & & & -1 & & & & & & \\
 & & & sC_4 & & & & & & -1 & & & & & \\
 & & & & sC_5 & & & & & & -1 & & & & \\
 & & & & & \mu & -1 & & & & & & & & \\
\hline
 & & & & & & & -1 & 1 & 1 & & & & & \\
 & & & & & & & & -1 & & 1 & & & &
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ U_1 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right]$$

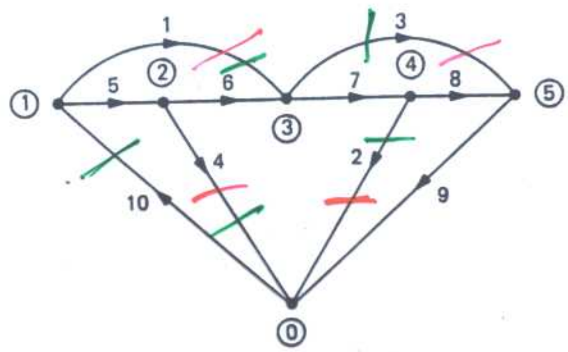
(πίνακας : 15x15 33 ≠0 πυκν. = 14.7%)

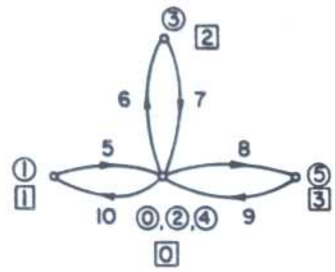
ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΡΑΙΟΥ ΠΙΝΑΚΑ με 2 γράφους: ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Κύκλωμα



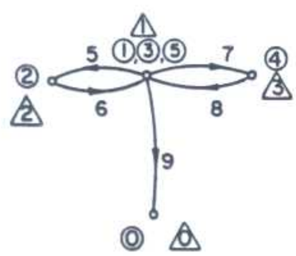
Γράφος





I - γράφος

$$A_i = \begin{array}{c} \\ \boxed{1} \\ \boxed{2} \\ \boxed{3} \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$



v- γράφος

$$A_v = \begin{array}{c} \\ \triangle 1 \\ \triangle 2 \\ \triangle 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Εξισώσεις Αραιού Πίνακα

	v-γράφος Τάσεις Κλάδων	I-γράφος Ρεύματα Κλάδων	IV-γράφος Τάσεις Κόμβων
	5 6 7 8 9	5 6 7 8 9 10	1 2 3

$V - A_v^T E = 0$ — Ν.Τ.Κ. στον V-γράφο

$MV + NI = W$ — Εξισώσεις Στοιχείων Κλάδων στους Δύο γράφους

$A_i I = 0$ — Ν.Ρ.Κ. στον I-γράφο

$$\left[\begin{array}{ccccc|cccccc|ccc}
1 & & & & & & & & & & & -1 & 1 & \\
 & 1 & & & & & & 0 & & & & 1 & -1 & \\
 & & 1 & & & & & & & & & -1 & & 1 \\
 & & & 1 & & & & & & & & 1 & & -1 \\
 & & & & 1 & & & & & & & -1 & & \\
\hline
G_5 & & & & & -1 & & & & & & & & \\
 & G_6 & & & & & -1 & & & & & & & \\
 & & G_7 & & & & & -1 & & & & & 0 & \\
 & & & G_8 & & & & & -1 & & & & & \\
 & & & & G_9 & & & & & -1 & & & & \\
 & & & & & & & & & & 1 & & & \\
\hline
 & & & & & 1 & & & & & -1 & & & \\
 & & 0 & & & & -1 & 1 & & & & & 0 & \\
 & & & & & & & & -1 & 1 & & & &
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c} V_5 \\ V_6 \\ V_7 \\ V_8 \\ V_9 \\ \hline I_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ I_8 \\ I_9 \\ I_{10} \\ \hline E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c} \\ \\ 0 \\ \\ \\ \hline \\ \\ \\ \\ \\ J_{10} \\ \hline \\ 0 \\ \\ \end{array}\right]$$

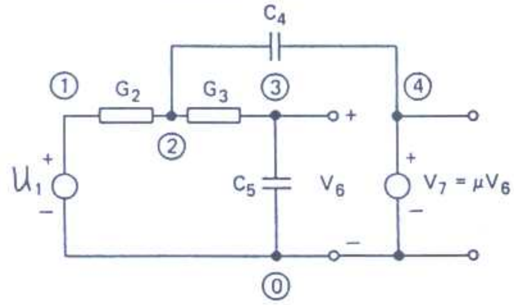
(Πίνακας: 14x14, 31 ≠ 0, πυκν. = 15.8 %)

ΙΔΕΑΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΙΑ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΜΕΘΟΔΟ ΚΟΜΒΩΝ ΜΕ 2 ΓΡΑΦΟΥΣ

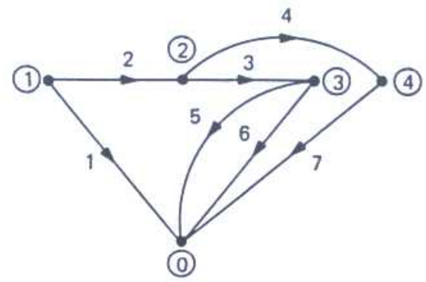
ELEMENT	SYMBOL	I–GRAPH	V–GRAPH	MATRIX	EQUATIONS
CURRENT SOURCE	j, J, j'	j_I, j'_I	j_V, j'_V	$\begin{array}{c} j_I \\ j'_I \end{array}\left[\begin{array}{c} -J \\ +J \end{array}\right]$ SOURCE VECTOR	$I_{j_I}=J$ $I_{j'_I}=-J$
VOLTAGE SOURCE	j, I, +, E, −, j'	$j_I \equiv j'_I$	j_V, j'_V	$\begin{array}{cc} j_V & j'_V \end{array}$ SOURCE VECTOR $m+1\left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \end{array}\right]\ \left[\begin{array}{c} E \end{array}\right]$	$V_{j_V}-V_{j'_V}=E$
OPEN CIRCUIT	j +, V, j' −	j_I, j'_I	j_V, j'_V	—	$V=V_{j_V}-V_{j'_V}$
SHORT CIRCUIT	j, I, j'	j_I, j'_I	$j_V \equiv j'_V$	$\begin{array}{c|c} & I \\ j_I & 1 \\ j'_I & -1 \end{array}$	I IS ARBITRARY
ADMITTANCE	j +, I, y, V, j' −	j_I, j'_I	j_V, j'_V	$\begin{array}{c} \\ j_I \\ j'_I \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} j_V & j'_V \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} y & -y \\ -y & y \end{array}\right] \end{array}$	$I_{j_I}=y(V_{j_V}-V_{j'_V})$ $I_{j'_I}=-y(V_{j_V}-V_{j'_V})$
IMPEDANCE	j +, I, z, V, j' −	j_I, j'_I	j_V, j'_V	$\begin{array}{c} \\ j_I \\ j'_I \\ m+1 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} j_V & j'_V & I \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} & & 1 \\ & & -1 \\ 1 & -1 & -z \end{array}\right] \end{array}$	$V_{j_V}-V_{j'_V}-zI=0$ $I_{j_I}=-I_{j'_I}=I$
NULLATOR	j, j'	j_I, j'_I	$j_V \equiv j'_V$	—	—
NORATOR	j, j'	$j_I \equiv j'_I$	j_V, j'_V	—	—
VCT MTP	j, +, V, j' −, k, gV, k'	j_I, j'_I, k_I, k'_I	j_V, j'_V, k_V, k'_V	$\begin{array}{c} \\ k_I \\ k'_I \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} j_V & j'_V \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} g & -g \\ -g & g \end{array}\right] \end{array}$	$I_{k_I}=g(V_{j_V}-V_{j'_V})$ $I_{k'_I}=-g(V_{j_V}-V_{j'_V})$
VVT MTT	j, +, V, j' −, I, k, +, μV, −, k'	j_I, j'_I, $k_V \equiv k'_V$	j_V, j'_V, k_V, k'_V	$\begin{array}{cccc} j_V & j'_V & k_V & k'_V \end{array}$ $\left[\begin{array}{cccc} -\mu & \mu & 1 & -1 \end{array}\right] m+1$	$V_{k_V}-V_{k'_V}-$ $\mu(V_{j_V}-V_{j'_V})=0$
CCT MPP	j, I, j', k, αI, k'	j_I, j'_I, k_I, k'_I	$j_V \equiv j'_V$, k_V, k'_V	$\begin{array}{c|c} & I \\ j_I & 1 \\ j'_I & -1 \\ k_I & \alpha \\ k'_I & -\alpha \end{array}$	$I_{j_I}=I$ $I_{j'_I}=-I$ $I_{k_I}=\alpha I$ $I_{k'_I}=-\alpha I$
CVT MPT	j, I_1, j', I_2, k, +, rI_1, −, k'	j_I, j'_I, $k_I \equiv k'_I$	$j_V \equiv j'_V$, k_V, k'_V	$\begin{array}{c} \\ j_I \\ j'_I \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} k_V & k'_V & I_1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} & & 1 \\ & & -1 \\ 1 & -1 & -r \end{array}\right] m+1 \end{array}$	$V_{k_V}-V_{k'_V}-rI_1=0$
OPERATIONAL AMPLIFIER	j, j', ∞, I, k, k'	j_I, j'_I, $k_I \equiv k'_I$	$j_V \equiv j'_V$, k_V, k'_V	—	—

ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΚΟΜΒΩΝ ΜΕ 2 ΓΡΑΦΟΥΣ : ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

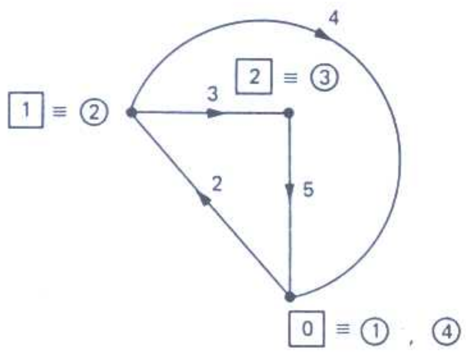
Κύκλωμα



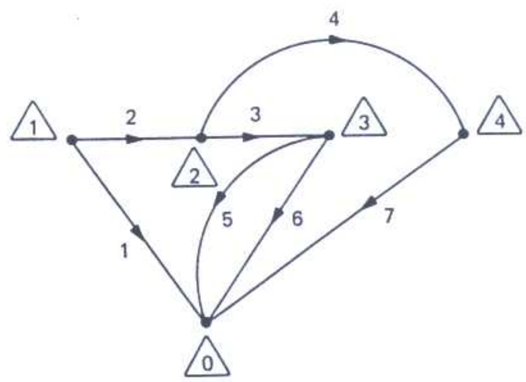
Γράφος



Ι-γράφος



V-γράφος



	Ι-γράφος							V-γράφος						
Κλάδος	~~1~~	2	3	4	5	~~6~~	~~7~~	1	2	3	4	5	6	7
Κόμβος Αναχώρησης	0	0	1	1	2	0	0	1	1	2	2	3	3	4
Κόμβος Κατάληξης	0	1	2	0	0	0	0	0	2	3	4	0	0	0

Εξισώσεις : (αρχικές συνθήκες = 0) ($E_{\triangle}$ = τάσεις κόμβων στον V-γράφο)

NPK $\boxed{1}$: $-G_2(E_{\triangle 1}-E_{\triangle 2})+G_3(E_{\triangle 2}-E_{\triangle 3})+sC_4(E_{\triangle 2}-E_{\triangle 4})$

NPK $\boxed{2}$: $-G_3(E_{\triangle 2}-E_{\triangle 3})+sC_5E_{\triangle 3}=0$

Π.Τ. : $E_{\triangle 1}=U_1$

Μ.Τ.Τ. : $E_{\triangle 4}-\mu E_{\triangle 3}=0$

Σε μορφή Πίνακα:

μέγεθος: 4×4

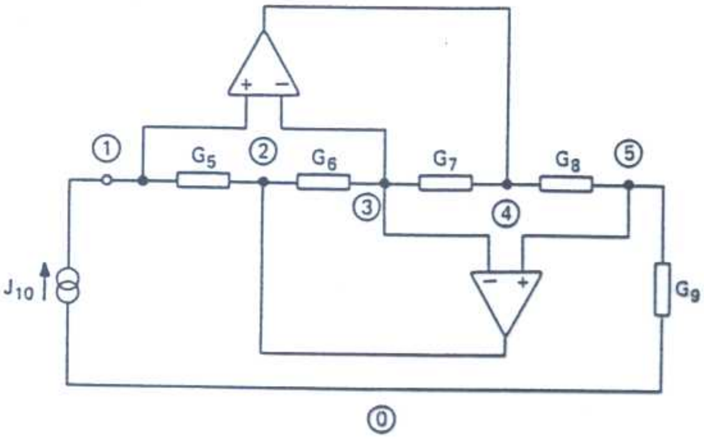
στοιχείων≠0 : 9

πυκνότ. : 56.3%

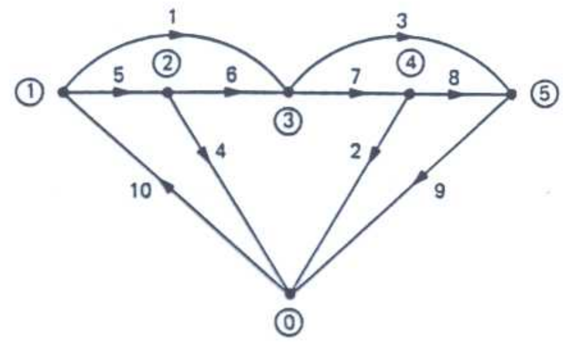
$$
\begin{array}{c}
\\ \boxed{1} \\ \boxed{2} \\ \text{ΠΤ} \\ \text{ΜΤΤ}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} \triangle 1 & \triangle 2 & \triangle 3 & \triangle 4 \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccc}
-G_2 & G_2+G_3+sC_4 & -G_3 & -sC_4 \\
0 & -G_3 & G_3+sC_5 & 0 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\mu & 1
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{bmatrix} E_{\triangle 1} \\ E_{\triangle 2} \\ E_{\triangle 3} \\ E_{\triangle 4} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ U_1 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

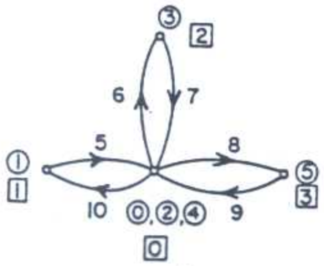
ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΚΟΜΒΩΝ ΜΕ 2 ΓΡΑΦΟΥΣ: ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Κύκλωμα

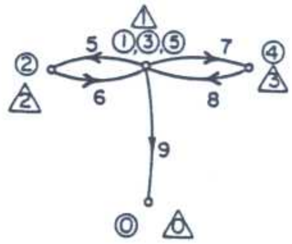


Γράφος





Ι - γράφος



V- γράφος

Κλάδος	Ι-γράφος										V-γράφος									
	~~1~~	~~2~~	~~3~~	~~4~~	5	6	7	8	9	10	~~1~~	~~2~~	~~3~~	~~4~~	5	6	7	8	9	~~10~~
Κόμβος Αναχώρ.	0	0	0	0	1	0	2	0	3	0	0	0	0	0	1	△2	1	3	1	0
Κόμβος Καταληξ.	0	0	0	0	0	2	0	3	0	1	0	0	0	0	2	△1	3	1	0	0

Εξισώσεις

($E_{\triangle}$ = τάσεις κόμβων στον V-γράφο)

NPK $\boxed{1}$: $G_5(E_{\triangle 1} - E_{\triangle 2}) = J_{10}$

NPK $\boxed{2}$: $-G_6(E_{\triangle 2} - E_{\triangle 1}) + G_7(E_{\triangle 1} - E_{\triangle 3}) = 0$

NPK $\boxed{3}$: $-G_8(E_{\triangle 3} - E_{\triangle 1}) + G_9 E_{\triangle 1} = 0$

Σε μορφή Πίνακα:

μέγεθος: 3x3

στοιχείων≠0: 7

πυκνότ. : 77.8%

$$
\begin{array}{c} \\ \boxed{1} \\ \boxed{2} \\ \boxed{3} \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \triangle 1 & \triangle 2 & \triangle 3 \end{array} \\
\begin{bmatrix} G_5 & -G_5 & 0 \\ G_6+G_7 & -G_6 & -G_7 \\ G_8+G_9 & 0 & -G_8 \end{bmatrix} \end{array}
\begin{bmatrix} E_{\triangle 1} \\ E_{\triangle 2} \\ E_{\triangle 3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{10} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$