Εξέταση στο Μάθημα: "ΘΕΩΡΙΑ ΔΙΚΤΥΩΝ" (5^o εξάμηνο)

(Διάρκεια: 3 ώρες) **Ημερομηνία:** 20 Φεβρουαρίου 2004

ΟΜΑΔΑ Α

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:______________________________

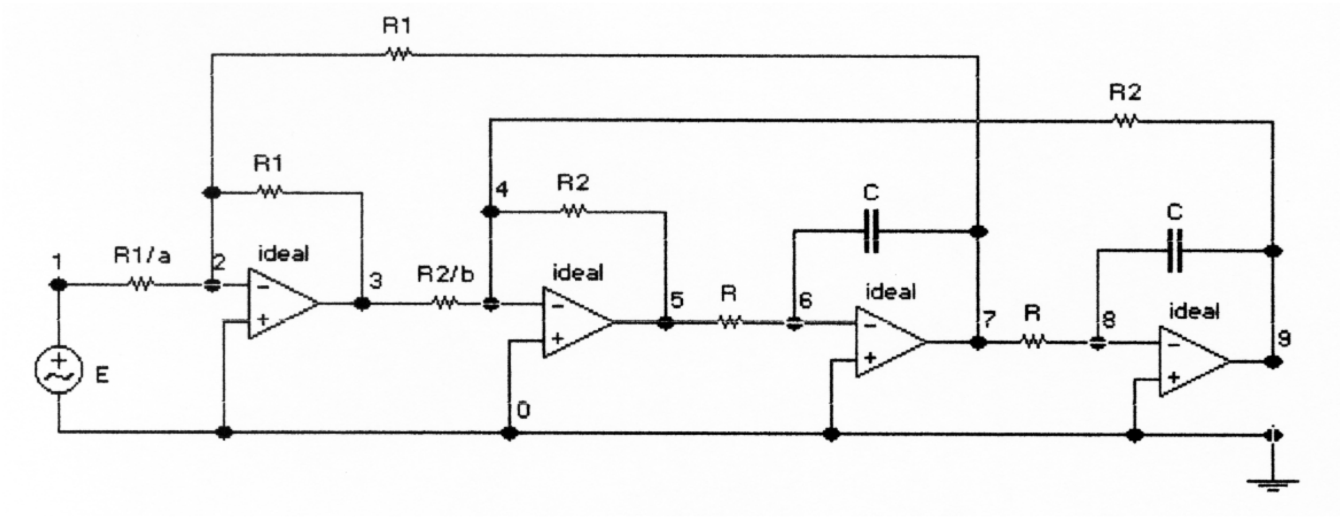
(Το παρόν επιστρέφεται)

Παρατηρήσεις: - Να γράψετε τον αριθμό των διφύλλων που παραδίδετε
- Να γράψετε το όνομά σας σε κάθε δίφυλλο που παραδίδετε

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Θέμα 1 (35%)

Για το κύκλωμα του Σχήματος:



Σχήμα 1

α. (10%) Να γραφούν οι εξισώσεις της τροποποιημένης μεθόδου των κόμβων με δύο γράφους.

β. (10%) Να ευρεθούν οι συναρτήσεις μεταφοράς $G_1(s)=V_9(s)/E(s)$ και $G_2(s)=V_3(s)/E(s)$.

γ. (10%) Όταν όλες οι αντιστάσεις είναι 10kΩ, α=10, β=1.5 και η διέγερση E(t) είναι E(t)=3*ημ(2π*1000t)+10*ημ(2π*2000t) παρατηρείται ότι στον κόμβο 3 στην μόνιμη κατάσταση δεν εμφανίζεται η κυκλική συχνότητα 2π*1000. Να προσδιοριστεί η τιμή της χωρητικότητας των πυκνωτών C και η απόκριση μόνιμης κατάστασης στον κόμβο 9.

δ. (5%) Να σχεδιαστεί το ασυμπτωτικό διάγραμμα Bode πλάτους της $G_2(s)$, για τις τιμές του ερωτήματος (γ), όταν C=50nF.

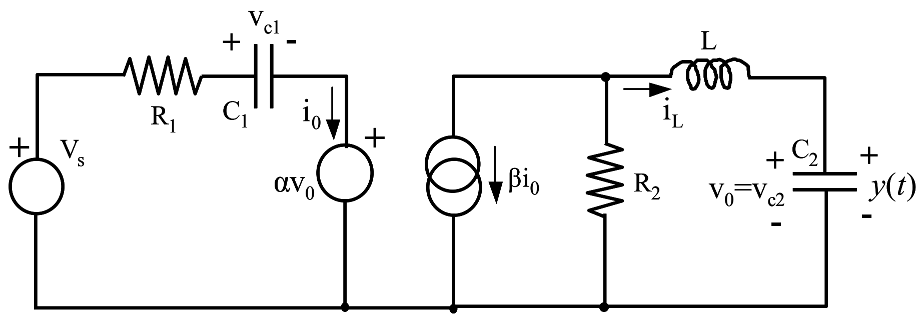
Θέμα 2 (35%)

Για το γραμμικό χρονικά αμετάβλητο κύκλωμα του Σχήματος 2:

α. (15%) Να γραφούν οι εξισώσεις κατάστασης του κυκλώματος, επιλέγοντας ως μεταβλητές κατάστασης τα v_{c1}, v_{c2}, i_L.

β. (10%) Όταν R_1=4Ω, R_2=10Ω, L=2H και $C_1=C_2$=25mF, να βρεθεί ποια συνθήκη πρέπει να πληρούν τα α, β ώστε το κύκλωμα να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

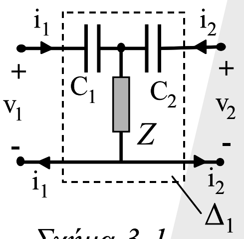
γ. (10%) Θεωρώντας αρχικές συνθήκες (στη χρονική στιγμή t=0):
$i_L(0)$=1A και $v_{c1}(0)=v_{c2}(0)=0$, να προσδιοριστεί η απόκριση y(t) μηδενικής εισόδου του κυκλώματος όταν α=1 και β=0.



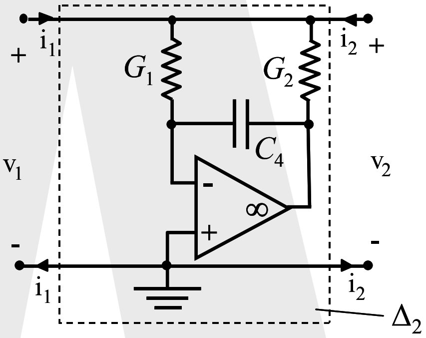
Σχήμα 2

<u>Θέμα 3</u> (30%)

α. (15%) Για τα δίθυρα Δ_1 και Δ_2 του Σχήματος 3-1 και 3-2 αντίστοιχα, να ευρεθούν οι μήτρες συνθέτων αντιστάσεων ανοικτοκύκλωσης Z_1 και Z_2, αντίστοιχα.



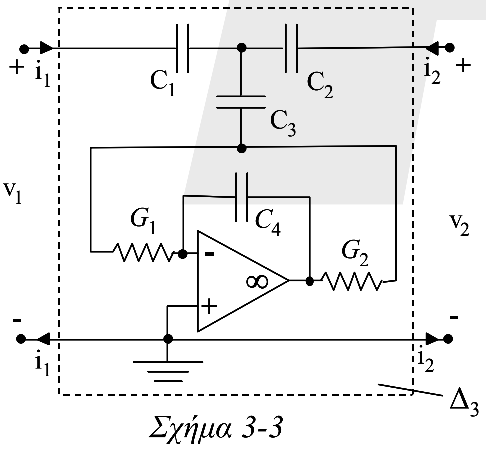
Σχήμα 3-1



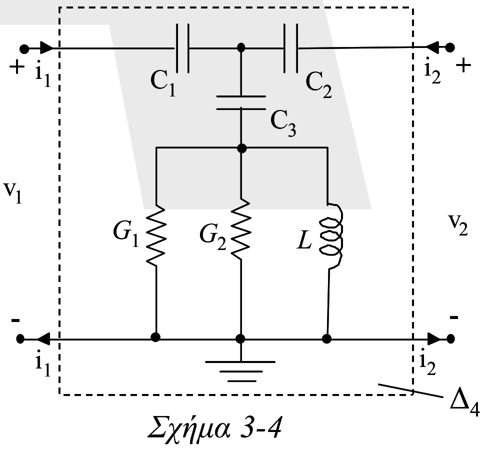
Σχήμα 3-2

β. (5%) Για το δίθυρο Δ_3 του Σχήματος 3-3, να ευρεθεί η μήτρα Z_3 συνθέτων αντιστάσεων ανοικτοκύκλωσης, αφού εξετασθεί η ισχύς των κριτηρίων Brune όπου αυτό απαιτείται.

γ. (10%) Να ευρεθεί η τιμή του πηνίου L ώστε τα δίθυρα Δ_3 (σχήμα 3-3) και Δ_4 (σχήμα 3-4) να είναι ισοδύναμα. Πότε τα Δ_3 και Δ_4 είναι συμμετρικά;

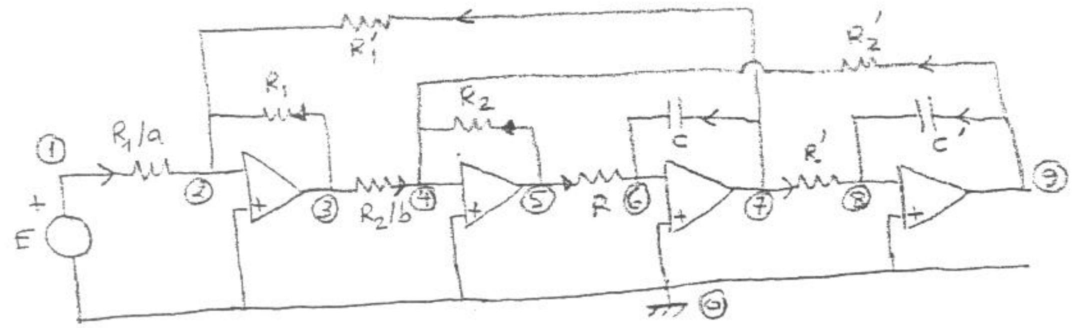


Σχήμα 3-3



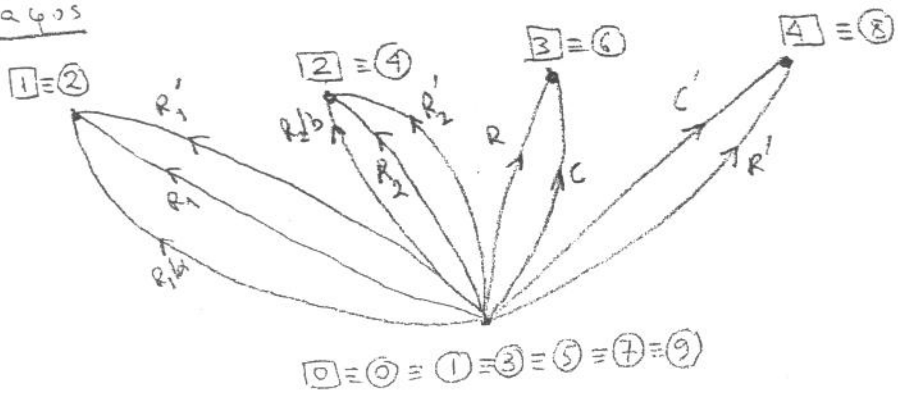
Σχήμα 3-4

ΘΕΜΑ 1ο

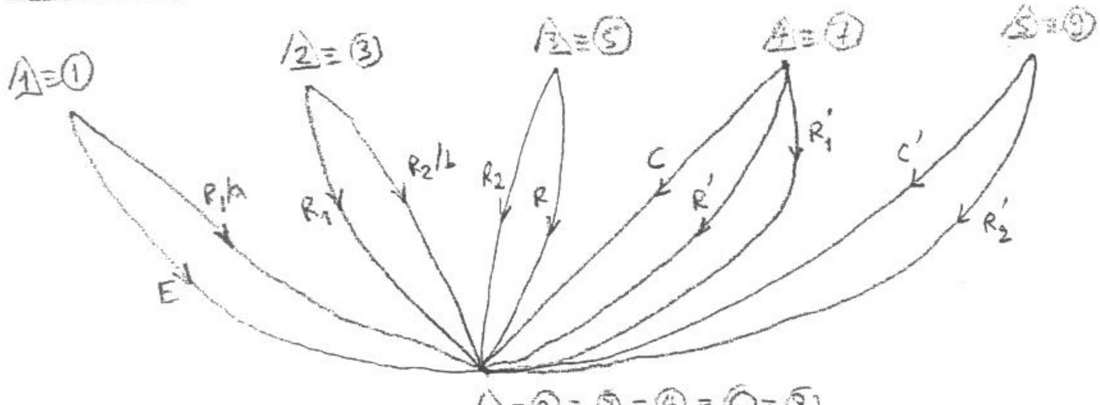


Το ανωτέρω κύκλωμα αντιστοιχεί στην ομάδα Α. Οι Ι-γράφος και V-γράφος είναι κοινοί και στις 4 ομάδες ως εξής

Ι - γράφος



V - γράφος



Οι εξισώσεις της τροποποιημένης μεθόδου των κόμβων με δύο γράφους είναι κοινές για τις 4 ομάδες ως εξής

$$
\begin{array}{c}
\\ \boxed{1} \\ \boxed{2} \\ \boxed{3} \\ \boxed{4} \\ E
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} \triangle 1 & \triangle 2 & \triangle 3 & \triangle 4 & \triangle 5 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
-G_1 a & -G_1 & 0 & -G_1' & 0 \\
0 & -G_2 b & -G_2 & 0 & -G_2' \\
0 & 0 & -G & -Cs & 0 \\
0 & 0 & 0 & -G' & -C's \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{bmatrix} V_{\triangle 1} \\ V_{\triangle 2} \\ V_{\triangle 3} \\ V_{\triangle 4} \\ V_{\triangle 5} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ E \end{bmatrix}
$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Η αγωγιμότητα της αντίστασης R_1/a είναι aG_1

2) Για τις συναρτήσεις μεταφοράς θα έχουμε

$$
\frac{V_9}{E(s)} = \frac{V_{\triangle 5}}{E(s)} = \frac{\begin{vmatrix}
-G_1 a & -G_1 & 0 & -G_1' & 0 \\
0 & -G_2 b & -G_2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -G & -Cs & 0 \\
0 & 0 & 0 & -G' & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & E(s)
\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}
-G_1 a & -G_1 & 0 & -G_1' & 0 \\
0 & -G_2 b & -G_2 & 0 & -G_2' \\
0 & 0 & -G & -Cs & 0 \\
0 & 0 & 0 & -G' & -C's \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix}} \cdot \frac{1}{E(s)} =
$$

$$
= \frac{\begin{vmatrix}
-G_1 a & -G_1 & 0 & -G_1' \\
0 & -G_2 b & -G_2 & 0 \\
0 & 0 & -G & -Cs \\
0 & 0 & 0 & -G'
\end{vmatrix} \cdot E(s)}{(-1)^{5+1}\begin{vmatrix}
-G_1 & 0 & -G_1' & 0 \\
-G_2 b & -G_2 & 0 & -G_2' \\
0 & -G & -Cs & 0 \\
0 & 0 & -G' & -C's
\end{vmatrix} E(s)} = \frac{ab\,G_1 G_2 G G'}{G'\begin{vmatrix}
-G_1 & 0 & 0 \\
-G_2 b & -G_2 & -G_2' \\
0 & -G & 0
\end{vmatrix} - C's\begin{vmatrix}
-G_1 & 0 & -G_1' \\
-G_2 b & -G_2 & 0 \\
0 & -G & -C
\end{vmatrix}}
$$

$$= \frac{abG_1G_2GG'}{G'GG_1G_2' - C's\left[-G_1G_2Cs - G_1'G_2bG\right]} = \frac{abG_1G_2G^2}{G_1G_2C^2s^2 + G_1G_2bGCs + G_1G_2G^2} =$$

$$= \frac{abG^2}{C^2s^2 + bGCs + G^2} = G_1(s)$$ της ομάδας Α και της ομάδας Δ

$$\frac{V_{4}(s)}{E(s)} = \frac{V_{\triangle 4}(s)}{E(s)} = \frac{1}{E(s)} \; \frac{\begin{vmatrix} -G_1a & -G_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -G_2b & -G_2 & 0 & -G_2' \\ 0 & 0 & -G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -C's \\ 1 & 0 & 0 & E(s) & 0 \end{vmatrix}}{\Pi(s)} =$$

$$= \frac{-E(s)\begin{vmatrix} -G_1a & -G_1 & 0 & 0 \\ 0 & -G_2b & -G_2 & -G_2 \\ 0 & 0 & -G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -C's \\ 0 & 0 & 0 & \end{vmatrix}}{E(s)\,\Pi(s)} = -\frac{G_1G_2abGC's}{G_1G_2C^2s^2 + G_1G_2bGCs + G_1G_2G^2}$$

$$= -\frac{abGCs}{C^2s^2 + bGCs + G^2} = G_1(s)$$ της ομάδας Β

$$\frac{V_{5}(s)}{E(s)} = \frac{V_{\triangle 3}(s)}{E(s)} = \frac{\begin{vmatrix} -G_1\alpha & -G_1 & 0 & -G_1' & 0 \\ 0 & -G_2b & 0 & 0 & -G_2' \\ 0 & 0 & 0 & -Cs & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -G' & -C's \\ 1 & 0 & E(s) & 0 & 0 \end{vmatrix}}{E(s)\,\Pi(s)} = \frac{E(s)\begin{vmatrix} -G_1a & -G_1 & -G_1' & 0 \\ 0 & -G_2b & 0 & -G_2' \\ 0 & 0 & -Cs & 0 \\ 0 & 0 & -G' & -C's \end{vmatrix}}{E(s)\cdot\Pi(s)}$$

$$= \frac{G_1aG_2b\begin{vmatrix} -Cs & 0 \\ -G' & -C's \end{vmatrix}}{\Pi(s)} = \frac{G_1G_2abC^2s^2}{G_1G_2C^2s^2 + G_1G_2bGCs + G_1G_2G^2} =$$

$$= \frac{\alpha bC^2s^2}{C^2s^2 + bGCs + G^2} = G_1(s)$$ της ομάδας Γ

$$\frac{V_3(s)}{E(s)} = \frac{V_2(s)}{E(s)} = \frac{\begin{vmatrix} -G_1\alpha & 0 & 0 & -G_1' & 0 \\ 0 & 0 & -G_2 & 0 & -G_2' \\ 0 & 0 & -G & -Cs & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -G' & -C's \\ 1 & E(s) & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{E(s)\,\Pi(s)} =$$

$$= \frac{(-1)^{5+2}E(s)\begin{vmatrix} -G_1 a & 0 & -G_1' & 0 \\ 0 & -G_2 & 0 & -G_2' \\ 0 & -G & -Cs & 0 \\ 0 & 0 & -G' & -C's \end{vmatrix}}{E(s)\,\Pi(s)} = \frac{-\,G_1 a \begin{vmatrix} -G_2 & 0 & -G_2' \\ -G & -Cs & 0 \\ 0 & -G' & -C's \end{vmatrix}}{\Pi(s)} =$$

$$= \frac{G_1\alpha\left[-G_2 CC's^2 - G_2' GG'\right]}{\Pi(s)} = \frac{-\alpha G_1 G_2\left[C^2s^2 + G^2\right]}{G_1G_2C^2s^2 + G_1G_2 bGCs + G_1G_2G^2} =$$

$$= \frac{-a\left[C^2s^2+G^2\right]}{C^2s^2 + bGCs + G^2} = G_2(s)$$ όλων των ομάδων

3) Το πολυώνυμο $C^2s^2+bGCs+G^2$ έχει ρίζες στο αριστερό ημιεπίπεδο.

Αν η $G(s)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής και εφαρμοστεί σαν είσοδος στο σύστημα η $u(t) = A\,\eta\mu\,\omega t$, η έξοδος $y(t)$ στη μόνιμη κατάσταση θα είναι $y(t) = A\,|G(j\omega)|\,\eta\mu[\omega t + Arg\,G(j\omega)]$

Καθώς $E(t) = 3\,\eta\mu(2\pi\cdot 1000t) + 10\,\eta\mu(2\pi\cdot 2000t)$, εφαρμόζοντας την αρχή της επαλληλίας

$$y(t) = 3\,|G_2(j2\pi\cdot 1000)|\,\eta\mu\left[2\pi\cdot 1000t + Arg\,G_2(j2\pi*1000)\right] +$$
$$+ 10\,|G_2(j2\pi*2000)|\,\eta\mu\left[2\pi*2000t + Arg\,G_2(j2\pi*2000)\right]$$

Για τις ομάδες Α, Β, Γ η μη εμφάνιση της συχνότητας $2\pi*1000$ σημαίνει $|G_2(j2\pi*1000)| = 0$. Αυτό σημαίνει

$$C^2\left[-(2\pi*1000)^2\right] + G^2 = 0$$

Καθώς $G = 10^{-4}\,\Omega^{-1}$, θα είναι

$$C = \frac{G}{2\pi*1000} = \frac{1}{2\pi}*10^{-7}\,F = \frac{100}{2\pi}\,nF$$

Για την ομάδα Δ όπως $|G_2(j2\pi*2000)|=0$ οπότε 1.5

$$C = \frac{G}{2\pi*2000} = \frac{1}{4\pi}\cdot 10^{-7} = \frac{100}{4\pi}\ nF$$

Για την ομάδα Α, η συνάρτηση μεταφοράς $V_g(s)/E(s) =$

$$= \frac{abG^2}{C^2s^2+bGCs+G^2} = G_1(s).$$ Για την $G_1(s)$ θα ισχύει

$$|G_1(j2\pi*1000)| = \frac{15*10^{-8}}{\left|\left(j\frac{100}{2\pi}\cdot 10^{-9}*2\pi*1000\right)^2 + 1.5*10^{-4}\cdot\frac{100}{2\pi}10^{-9}*j2\pi*1000 + 10^{-8}\right|} =$$

$$= \frac{15*10^{-8}}{1.5*10^{-8}} = 10$$

$$Arg\, G_1(j2\pi1000) = Arg\left(\frac{10}{j}\right) = -90^\circ = -\frac{\pi}{2}$$

$$|G_1(j2\pi*2000)| = \frac{15*10^{-8}}{\left|\left(j\frac{100}{2\pi}\cdot 10^{-9}\cdot 2\pi*2000\right)^2 + 1.5*10^{-4}*\frac{100}{2\pi}\cdot 10^{-9}*j2\pi*2000 + 10^{-8}\right|}$$

$$= \frac{15*10^{-8}}{|(j2*10^{-4})^2 + j3*10^{-8} + 10^{-8}|} = \frac{15*10^{-8}}{|-3*10^{-8} + j3\cdot 10^{-8}|}$$

$$= \frac{15}{|-3+j3|} = \frac{15}{\sqrt{18}} = 3.53$$

$$Arg\, G_1(j2\pi*2000) = Arg\left[\frac{15}{-3+j3}\right] = Arg(15) - Arg(-3+j3) = 0 - 145^\circ = -145^\circ = -\frac{3\pi}{4}$$

Αρα

$$V_g(t) = 3*10\ ημ\left(2\pi*1000t - \frac{\pi}{2}\right) + 10*3.53*ημ\left(2\pi*2000t - \frac{3\pi}{4}\right)$$

Ομοίως υπολογίζονται για τις άλλες ομάδες

γ) Για την ομάδα Α

$$G_2(s) = -\frac{a[C^2s^2+G^2]}{C^2s^2+bGCs+G^2} = -\frac{10*[(50*10^{-9})^2s^2+10^{-8}]}{(50*10^{-9})^2s^2+1.5*10^{-4}*50*10^{-9}s+10^{-8}}$$

$$= \frac{-10[25*10^{-16}s^2+10^{-8}]}{25*10^{-16}s^2+7.5*10^{-12}s+10^{-8}} = \frac{-10[1+25*10^{-8}s^2]}{1+7.5*10^{-4}s+25*10^{-8}s^2}$$

Η διακρίνουσα του αριθμητή είναι $\Delta_\alpha = 0 - 4*25*10^{-8} < 0$ οπότε ο αριθμητής έχει μιγαδικές ρίζες οπότε δεν παραγοντοποιείται σε πρωτοβάθμιους παράγοντες

Η διακρίνουσα του παρονομαστή είναι $\Delta_\Pi = (7.5*10^{-4})^2 - 4*25*10^{-8} < 0$

οπότε δεν παραγοντοποιείται σε πρωτοβάθμιους παράγοντες

Κυκλική συχνότητα θλάσης του αριθμητή

$$\frac{1}{\omega_z^2} = 25*10^{-8} \Longrightarrow \omega_z = \frac{10^4}{5} = 2000 \text{ rad/sec}$$

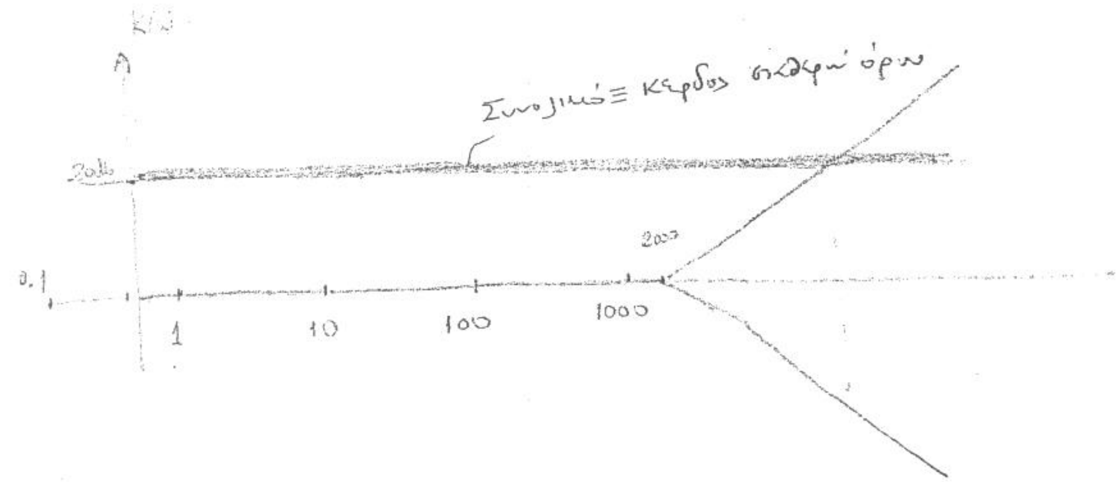
Κυκλική συχνότητα θλάσης του παρονομαστή

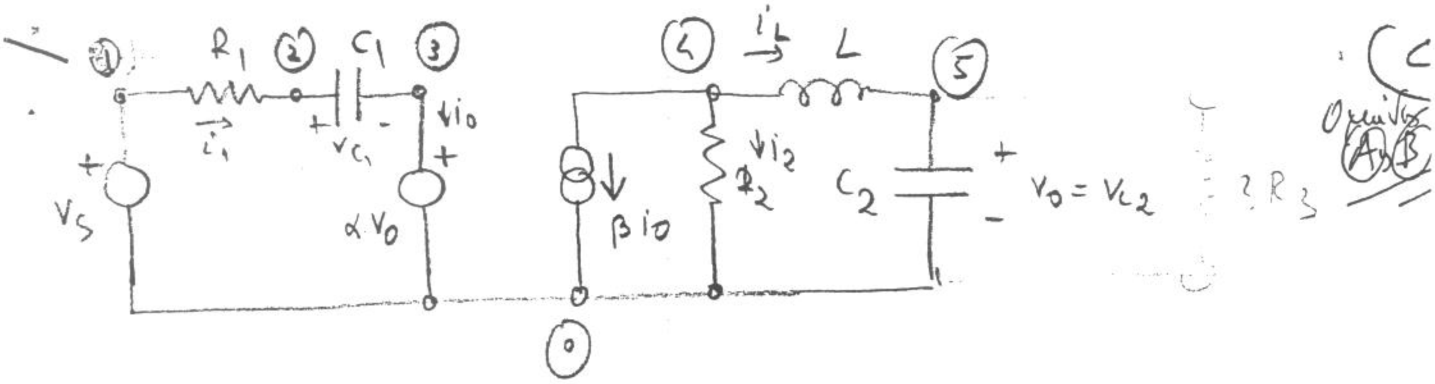
$$\frac{1}{\omega_p^2} = 25*10^{-8} \Longrightarrow \omega_p = \frac{10^4}{5} = 2000 \text{ rad/sec}$$

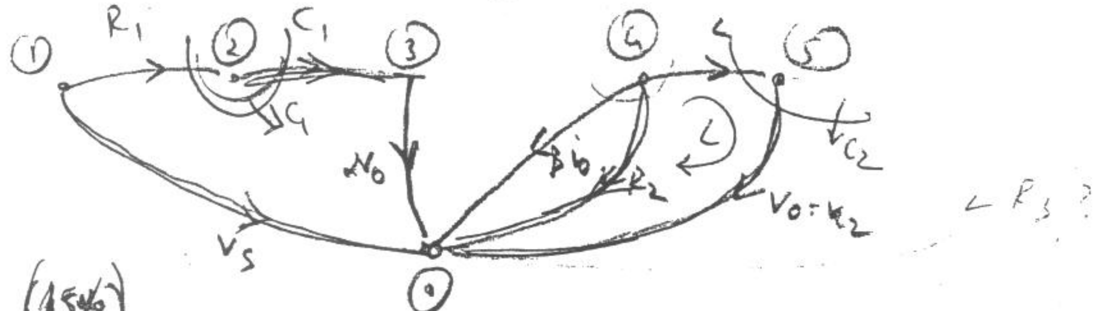
Το κέρδος του σταθερού παράγοντα είναι

$K(\omega) = 20 \log_{10} |-10| = 20 \text{ db}$

Τα επιμέρους διαγράμματα Bode πλάτους και το συνολικό φαίνονται στο Σχήμα







(15%)

(α) Εξισώσεις κατάστασης $\underline{x} = (v_{C_1}, v_{C_2}, i_L)$ (στο πεδίο συχνότητας, αρχ. συνθήκες=0)

$\circledast$ C_1 : $(sC_1)V_{C_1} = i_1 = i_0$

$R_1 i_1 + V_{C_1} + \alpha V_0 = V_S$

$i_0 = i_1 = \frac{1}{R_1}(-V_{C_1} - \alpha V_0 + V_S)$

$$\Rightarrow \boxed{(sC_1)V_{C_1} = -\frac{1}{R_1} \cdot V_{C_1} - \frac{\alpha}{R_1} \cdot V_{C_2} + \frac{1}{R_1} V_S} \quad (1)$$

$$\boxed{R_1 C \frac{dv_{C_1}}{dt} = -V_{C_1} - \alpha V_{C_2} + V_S} \quad (1)'$$

$\circledast$ C_2 : $\boxed{(sC_2)V_{C_2} = i_L}$ (2) $\left\{ - \frac{V_{C_2}}{R_3} \right\}$

$\circledast$ L : $(sL)\, i_L + V_{C_2} - V_{R_2} = 0.$ $\left(L\frac{di_L}{dt} = -V_{C_2} + R_2 I_2 \right)$ όπου $I_2 = -i_L - \beta i_0$

$V_{R_2} = R_2 \cdot i_2$

$i_2 + i_L + \beta i_0 = 0$

$i_0 = i_1 = \frac{1}{R_1}(-V_{C_1} - \alpha V_0 + V_S)$

$$\Rightarrow V_{R_2} = R_2\left[-i_L - \frac{\beta}{R_1}(-V_{C_1} - \alpha V_0 + V_S)\right]$$

$$\Rightarrow (sL)\, i_L = -\cancel{V_{C_2}} + R_2\left[-i_L + \frac{\beta}{R_1}(V_{C_1} + \alpha \cancel{V_{C_2}} - V_S)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{(sL)\, i_L = \left(\frac{\beta R_2}{R_1}\right) V_{C_1} + \left(\frac{(\alpha\beta) R_2}{R_1} - 1\right) V_{C_2} - R_2 i_L - \left(\frac{R_2}{R_1}\beta\right) \underline{V_S}} \quad (3)$$

(C

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1C_1} & -\frac{\alpha}{R_1C_1} & 0 \\ 0 & -\cancel{\frac{1}{R_3C_2}}\ 0 & \frac{1}{C_2} \\ \left(\frac{\beta R_2}{R_1 L}\right) & \frac{(\alpha\beta)R_2 - R_1}{R_1 L} & -\frac{R_2}{L} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC_1} \\ 0 \\ -\frac{R_2\beta}{R_1 L} \end{bmatrix}.$$

$$A = \begin{bmatrix} -10 & -10\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 40 \\ \frac{10}{8}\beta & \frac{10\alpha\beta - 4}{8} & -5 \end{bmatrix}$$

$\underline{y = x_{C_2} = x_2}$

10-15% $C = [0 \quad 1 \quad 0]$

(β) Ποιά [illegible] πρέπει να είναι τα α, β → ασυμπτωτικά ευσταθές

[illegible] ευσταθές

$$[sI - A] = \begin{bmatrix} s + \frac{1}{R_1C_1} & \alpha/R_1C_1 & 0 \\ 0 & s + 1/R_3C_2 & -1/C_2 \\ -\left(\frac{\beta R_2}{R_1 L}\right) & \frac{R_1 - \alpha\beta R_2}{R_1 L} & s + \frac{R_2}{L} \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_1 = 4\Omega \\ R_2 = 10\Omega \\ L = 2H \\ C_1 = 25mF \\ C_2 = 25mF \end{pmatrix}$$

$R_3 = 1$

$w_3 = \frac{1}{R_3C_2}$

$$\chi(s) = \det(sI - A) = \left(s + \frac{1}{R_1C_1}\right)\left[\left(s + \frac{1}{R_3C_2}\right)\left(s + \frac{R_2}{L}\right) + \frac{1}{C_2}\left(\frac{R_1 - \alpha\beta R_2}{R_1 L}\right)\right] + \left(\frac{\beta R_2}{R_1 L}\right)\left(\frac{\alpha}{R_1C_1}\right)\left(\frac{1}{C_2}\right)$$

$$= (s+10)\left[(s + w_3)(s+5) + \overset{5}{\cancel{40}}\left(\frac{4 - 10\alpha\beta}{\cancel{8}}\right)\right] + \left(\frac{10\beta}{8}\right)\left(\frac{\alpha \cdot 10}{1}\right)\frac{40}{1}$$

$(w_3 = 0)$

$$= (s+10)\left[s^2 + 5s + (20 - 50\alpha\beta)\right] + (500\alpha\beta)$$

$$= s^3 + 15s^2 + \underbrace{(50 + 20 - 50\alpha\beta)}_{70 - 50\alpha\beta}s + \underbrace{100(2 - 5\alpha\beta) + 500\alpha\beta}_{200}$$

s^3	1	$70 - 50\alpha\beta$
s^2	15	200
s^1	γ	:
s^0	200	:

$$\gamma = \frac{\overset{3}{\cancel{15}}(70 - 50\alpha\beta) - \overset{40}{\cancel{200}}}{\cancel{15}\,3} = \frac{210 - 150\alpha\beta - 40}{3} = \frac{170 - 150\alpha\beta}{3} > 0$$

$$\boxed{\alpha \cdot \beta < \frac{170}{3 \cdot 50} = \frac{17\cancel{0}}{15\cancel{0}} \approx 1.13}$$

$$(s\dot{I}-A)^{*t} = \begin{bmatrix} s+10 & 10\alpha & 0 \\ 0 & s & -40 \\ -\frac{10}{8}\beta & \frac{4-10\alpha\beta}{8} & s+5 \end{bmatrix}$$

$$\psi(s) = s \begin{vmatrix} s+10 & 0 \\ -\frac{10}{8}\beta & s+5 \end{vmatrix} + 40 \begin{vmatrix} s+10 & 10\alpha \\ -\frac{10}{8}\beta & \frac{4-10\alpha\beta}{8} \end{vmatrix} =$$

$$= s(s+10)(s+5) + \cancel{40}^{5}\left[\frac{(4-10\alpha\beta)}{\cancel{8}}(s+10) + \frac{100\alpha\beta}{\cancel{8}}\right] =$$

$$= s(s^2+15s+50) + 5\left[(4-10\alpha\beta)s + \overbrace{10(4-10\alpha\beta)+100\alpha\beta}^{40-100\alpha\beta+100\alpha\beta}\right] =$$

$$= s^3+15s^2+50s + (20-50\alpha\beta)s + 200 \Rightarrow$$

$$\psi(s) = s^3+15s^2+(70-50\alpha\beta)s+200$$

s^3	1	$(70-50\alpha\beta)$	0
s^2	15	200	0
s^1	γ	0	
s^0	200		

Λόγω Routh: $\gamma > 0$

$$\gamma = \frac{15(70-50\alpha\beta)-200}{15} =$$

$$= 70-50\alpha\beta - \frac{\cancel{200}^{40}}{\cancel{15}_{3}} > 0$$

$$\Leftrightarrow 210 - 150\alpha\beta - 40 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\alpha\beta < \frac{17\cancel{0}}{15\cancel{0}}} \simeq 1.13$$

$$\underline{Y_{zi}(s) = C\,(sI-A)^{-1}\,\underline{x}(0)} = [0 \quad 1 \quad 0] \cdot \frac{1}{\Delta(s)} \left|\Delta'_{ij}(s)\right| \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad Y_{zi}(s) = \frac{\Delta'_{23}(s)}{\Delta(s)}$$

$$\bullet \quad \Delta'_{23}(s) = (-1)^{2+3} \times \left\{ \begin{vmatrix} s+10 & 0 \\ 0 & -40 \end{vmatrix} \right\} = \underline{40\,(s+10)}$$

$\alpha = 1, \beta = 0$

$$\bullet \quad \Delta(s) = \begin{vmatrix} s+10 & 10 & 0 \\ 0 & s & -40 \\ 0 & 0.5 & s+5 \end{vmatrix} = (s+10)\left[s\,(s+5) + 20\right] =$$

$$= \underline{(s+10)\left\{s^2 + 5s + 20\right\}}$$

$$Y_{zi}(s) = \frac{40\,\cancel{(s+10)}}{\cancel{(s+10)}\,(s^2+5s+20)} \rightarrow y_{zi}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{40}{s^2+5s+20}\right\}$$

$$\delta = 25 - 80 = -55 < 0$$

$$p_{1,2} = \frac{-5 \pm j\sqrt{55}}{2} \qquad \boxed{\lambda = -\frac{5}{2}} \qquad \boxed{\omega = \frac{\sqrt{55}}{2}}$$

$$y_{zi}(t) = 40 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{(s-p_1)} + \frac{\bar{A}}{(s-p_2)}\right\} = \underline{80\,|A| \cdot e^{\lambda t} \cos(\omega t + \varphi)} \qquad \varphi = \measuredangle A$$

$(p_2 = \bar{p}_1)$ όπου $p_1 = \lambda + j\omega$

$$A e^{p_1 t} + \bar{A} e^{\bar{p}_1 t} = |A| e^{j\varphi} e^{(\lambda_1 + j\omega_1)t} + \underset{A e^{-j\varphi}}{\bar{A}}\, e^{(\lambda_1 - j\omega_1)t} = |A|\, e^{\lambda_1 t} e^{j(\omega_1 t + \varphi)} + |A|\, e^{\lambda_1 t} e^{-j(\omega_1 t + \varphi)}$$

$$= |A|\, e^{\lambda_1 t} \left[\cos(\omega_1 t + \varphi) + \cancel{j \sin(\omega_1 t + \varphi)} + \cos(\omega_1 t + \varphi) - \cancel{j \sin(\omega_1 t + \varphi)}\right]$$

$$= \underline{2\,|A|\, e^{\lambda_1 t} \cos(\omega_1 t + \varphi)}$$

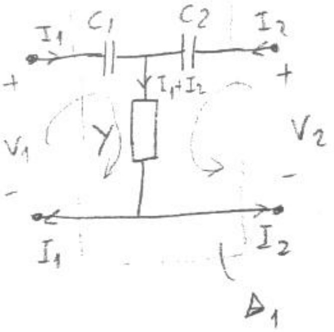
$$A = Y_{zi}(s) \cdot (s - p_1)\Big|_{s=p_1} = \frac{1}{(p_1 - p_2)} = \frac{1}{-\cancel{\frac{5}{2}} + j\frac{\sqrt{55}}{2} + \cancel{\frac{5}{2}} + j\frac{\sqrt{55}}{2}} = \frac{1}{j\sqrt{55}} = \underline{-\frac{j}{\sqrt{55}}}$$

$$\boxed{|A| = \frac{1}{\sqrt{55}}}, \quad \boxed{\varphi = -90^\circ}$$

$$\boxed{y_{zi}(t) = \frac{80}{\sqrt{55}} \cdot e^{\frac{-5t}{2}} \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{\sqrt{55}}{2}t - \frac{\pi}{2}\right)}_{\sin\left(\frac{\sqrt{55}}{2}t\right)}}$$

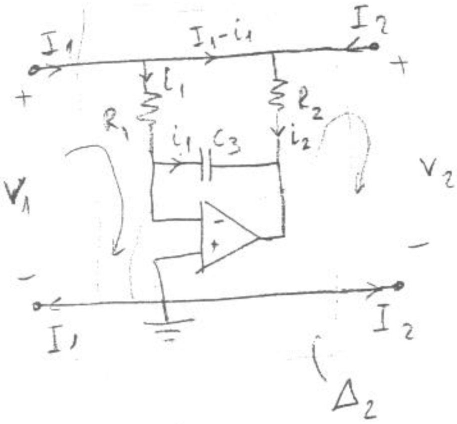
$\boxed{B, \Gamma}$

(a) (15%)



$$\left.\begin{aligned} -V_1 + \frac{I_1}{sC_1} + \frac{I_1+I_2}{Y} &= 0 \\ -V_2 + \frac{I_2}{sC_2} + \frac{I_1+I_2}{Y} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{Y}+\frac{1}{sC_1} & \frac{1}{Y} \\ \frac{1}{Y} & \frac{1}{Y}+\frac{1}{sC_2} \end{bmatrix}}_{Z_1} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$



$$V_1 = V_2 \quad (1)$$

$$-V_1 + i_1R_1 = 0 \Rightarrow V_1 = R_1 i_1 \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{i_1}{sC_3} - R_2 i_2 + V_2 &= 0 \\ I_1 - i_1 + I_2 &= i_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow V_2 = -\frac{i_1}{sC_3} + R_2(I_1+I_2-i_1 \quad (3)$$

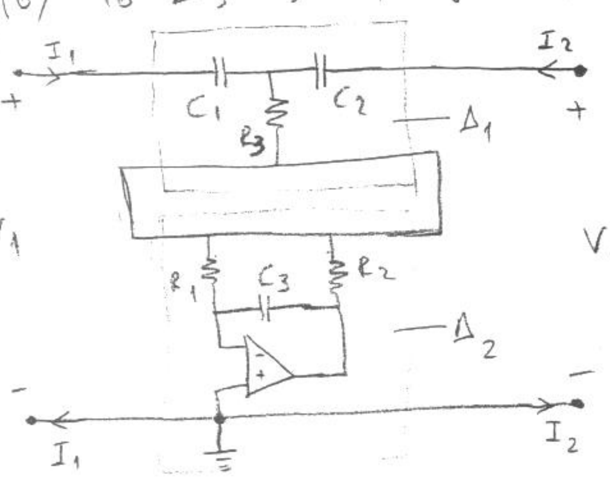
$$(1),(2),(3) \Rightarrow V_1 = V_2 = i_1R_1 = -\frac{i_1}{sC_3} + (I_1+I_2)R_2 - i_1R_2 \Rightarrow i_1\left(R_1+R_2+\frac{1}{sC_3}\right) = (I_1+I_2)$$

$$\Rightarrow i_1 = \frac{sC_3R_2}{sC_3(R_1+R_2)+1}(I_1+I_2) \qquad (4)$$

$$(1),(2),(4) \Rightarrow V_1 = V_2 = \frac{sC_3R_1R_2}{1+sC_3(R_1+R_2)}(I_1+I_2) \Rightarrow$$

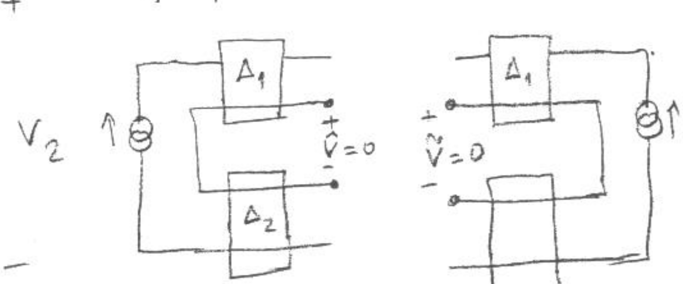
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \frac{sC_3R_1R_2}{1+sC_3(R_1+R_2)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \Rightarrow Z_2 = \frac{sC_3R_1R_2}{1+sC_3(R_1+R_2)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) (5%) Το Δ_3 ξανασχεδιάζεται (ισοδύναμα) ως εξής:



Είναι σειρά-σειρά σύνδεση των Δ_1 & Δ_2.

Κριτήρια Brune:



κριτήρια Brune ισχύουν.

Κριτήρια Brune ισχύουν $\Rightarrow$ $Z_3 = Z_1 + Z_2$, όπου $Y = \frac{1}{R_3}$ στο Σ_1. 3.2

$$\Rightarrow Z_3 = Z_1 + Z_2 = \begin{bmatrix} R_3 + \frac{1}{sC_1} + \frac{sC_3R_1R_2}{1+sC_3(R_1+R_2)} & R_3 + \frac{sC_3R_1R_2}{1+sC_3(R_1+R_2)} \\ R_3 + \frac{sC_3R_1R_2}{1+sC_3(R_1+R_2)} & R_3 + \frac{1}{sC_2} + \frac{sC_3R_1R_2}{1+sC_3(R_1+R_2)} \end{bmatrix}$$

(γ) Το Δ_4 είναι της μορφής Δ_1 όπου Y είναι ο συνδυασμός
(10%) R_3 σε σειρά με (L, R_1, R_2 παράλληλα), δηλαδή

$$\frac{1}{Y} = R_3 + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{sL}} = R_3 + \frac{sLR_1R_2}{sL(R_1+R_2) + R_1R_2}$$

Τότε, από ερώτημα (α), είναι:

$$Z_4 = \begin{bmatrix} R_3 + \frac{sLR_1R_2}{sL(R_1+R_2)+R_1R_2} + \frac{1}{sC_1} & R_3 + \frac{sLR_1R_2}{sL(R_1+R_2)+R_1R_2} \\ R_3 + \frac{sLR_1R_2}{sL(R_1+R_2)+R_1R_2} & R_3 + \frac{sLR_1R_2}{sL(R_1+R_2)+R_1R_2} + \frac{1}{sC_2} \end{bmatrix}$$

Τα Δ_3 και Δ_4 είναι ισοδύναμα αν και μόνο $Z_3 = Z_4$ $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{sC_3R_1R_2}{1+sC_3(R_1+R_2)} = \frac{sLR_1R_2}{sL(R_1+R_2)+R_1R_2}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{s^2C_3LR_1R_2(R_1+R_2)} + sC_3(R_1R_2)^2 = sLR_1R_2 + \cancel{s^2C_3LR_1R_2(R_1+R_2)}$$

$$\Leftrightarrow L = C_3R_1R_2$$

Τα Δ_3 και Δ_4 είναι συμμετρικά αν για τις μήτρες Z_3 και Z_4 ισχύουν
$z_{11} = z_{22}$ και $z_{12} = z_{21}$

δηλαδή αν $C_1 = C_2$.