Εξέταση στο Μάθημα: "ΘΕΩΡΙΑ ΔΙΚΤΥΩΝ" (5^o εξάμηνο)

(Διάρκεια: 3 ώρες) **ΟΜΑΔΑ Α** **Ημερομηνία:** 17 Σεπτεμβρίου 2003

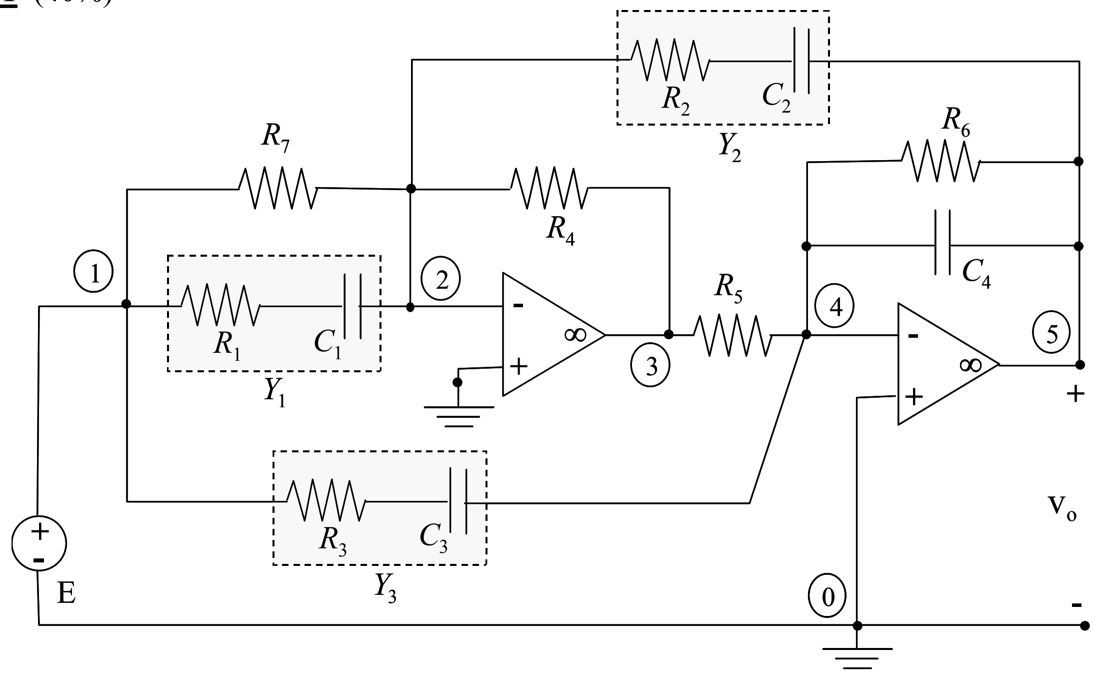
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:____

(Το παρόν επιστρέφεται)

Παρατηρήσεις: - Να γράψετε τον αριθμό των διφύλλων που παραδίδετε
- Να γράψετε το όνομά σας σε κάθε δίφυλλο που παραδίδετε

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Θέμα 1 (40%)



Σχήμα 1

Για το κύκλωμα του παραπάνω Σχήματος 1:

(α) (10%) Να γραφούν οι εξισώσεις της τροποποιημένης μεθόδου των κόμβων με δύο γράφους.

(β) (5%) Να προσδιορισθεί η συνάρτηση μεταφοράς: $G(s) = V_o(s)/E(s)$ εαν R_4=R_5=1Ω, και R_7=(1/2)Ω.

(γ) (10%) Εάν $R_1 = \dfrac{1}{4-b}\Omega$, $C_1 = \dfrac{4-b}{2}\mathrm{F}$, $R_3 = \dfrac{1}{5-b}\Omega$, $C_3 = (5-b)\mathrm{F}$, R_2=R_6=1Ω και C_2=C_4=1F, και R_4, R_5, R_7 όπως στο ερώτημα (β), να ευρεθεί για ποιες τιμές του b το σύστημα έχει πόλους και μηδενικά στο αριστερό ημιεπίπεδο (σύστημα ελαχίστης φάσεως).

(δ1) (5%) Για b της επιλογής σας να σχεδιαστεί το ασυμπτωτικό διάγραμμα Bode πλάτους της G(s).

(δ2) (5%) Να ευρεθεί για ποιες τιμές του b το διάγραμμα Bode του (δ1) εξαρτάται από το b.

(δ3) (5%) Να ευρεθεί εαν υπάρχουν τιμές του b ώστε να απειρίζεται η συνάρτηση απόσβεσης για πεπερασμένη κυκλική συχνότητα ω και σε περίπτωση καταφατική να προσδιοριστεί το ω.

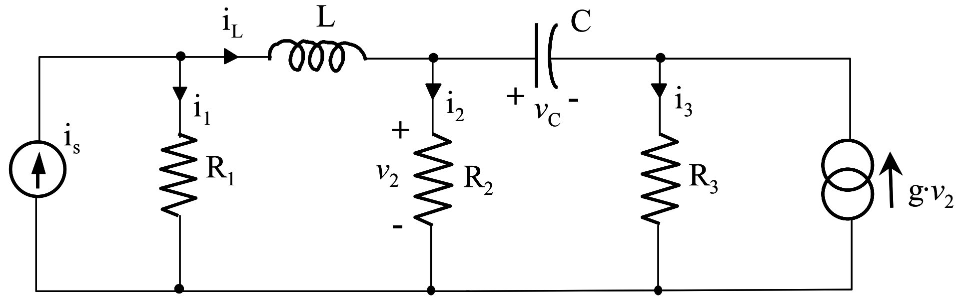
Θέμα 2 (30%)

Για το γραμμικό χρονικά αμετάβλητο κύκλωμα του παρακάτω Σχήματος 2, έχουμε: R_1=R_3=1Ω, C=1F, και L=1H.

(α) (15%) Να γραφούν στο πεδίο του χρόνου οι εξισώσεις κατάστασης του κυκλώματος, καθώς και η εξίσωση εξόδου, θεωρώντας ως έξοδο τη μεταβλητή y=v_2, και χρησιμοποιώντας ως μεταβλητές κατάστασης τα v_C, i_L.

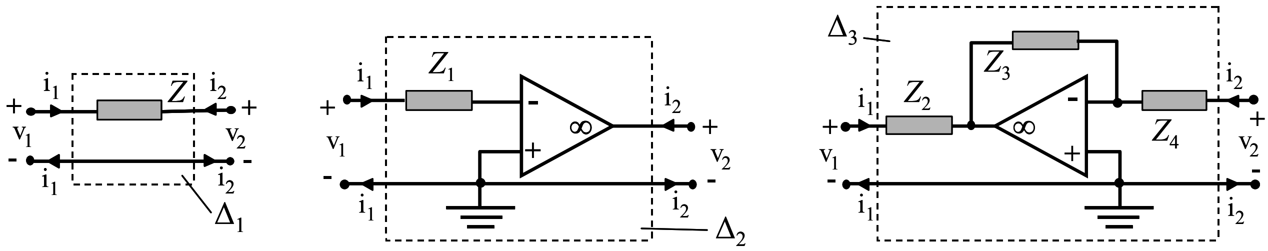
(β) (10%) Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς $H(s)=Y(s)/I_s(s)$ (R_2=0.5Ω, και g=2S στην εξαρτημένη πηγή ρεύματος).

(γ) (5%) Θεωρώντας μηδενικές αρχικές συνθήκες, να προσδιοριστεί αναλυτικά και να σχεδιασθεί η βηματική απόκριση του κυκλώματος.



Σχήμα 2

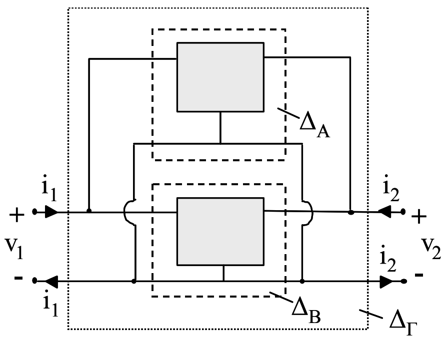
<u>Θέμα 3</u> (40%)



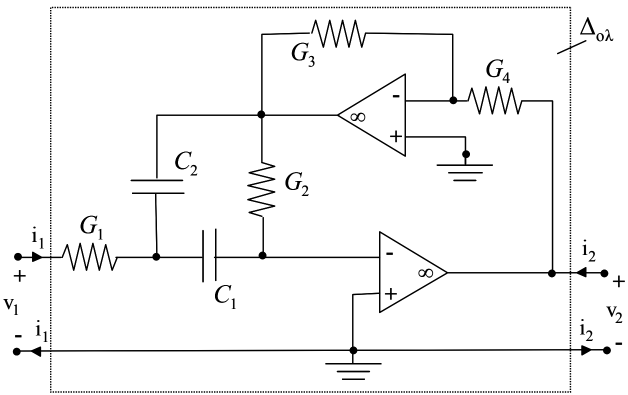
Σχήμα 3-1

(α) (8%) Να ευρεθούν οι μήτρες παραμέτρων μεταφοράς $\mathbf{T}_1$ και $\mathbf{T}_2$ των διθύρων Δ_1 και Δ_2 του Σχήματος 3-1, καθώς και η μήτρα συνθέτων αγωγιμοτήτων βραχυκύκλωσης $\mathbf{Y}_3$ του διθύρου Δ_3 του ίδιου σχήματος.

(β) (8%) Έστω ότι είναι γνωστές οι μήτρες συνθέτων αγωγιμοτήτων βραχυκύκλωσης $\mathbf{Y}_A = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$ του Δ_A, και παραμέτρων μεταφοράς $\mathbf{T}_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ του Δ_B (βλ. Σχήμα 3-2). Υπάρχει η μήτρα συνθέτων αγωγιμοτήτων βραχυκύκλωσης $\mathbf{Y}_B$ του Δ_B; Να ευρεθεί η μήτρα παραμέτρων μεταφοράς $\mathbf{T}_\Gamma$ του συνολικού διθύρου Δ_Γ (αφού γίνει έλεγχος των κριτηρίων Brune).



Σχήμα 3-2



Σχήμα 3-3

(γ) (24%) Κάνοντας χρήση των αποτελεσμάτων των ερωτημάτων (α) και (β) παραπάνω και του τυπολογίου, να ευρεθεί η μήτρα παραμέτρων μεταφοράς $\mathbf{T}_{ολ}$ του διθύρου του Σχήματος 3-3 καθώς και η συνάρτηση μεταφοράς $G(s)=V_2/V_1$.

Εξέταση στο Μάθημα: "ΘΕΩΡΙΑ ΔΙΚΤΥΩΝ" (5ο εξάμηνο)

(Διάρκεια: 3 ώρες) **Ημερομηνία:** 17 Σεπτεμβρίου 2003

ΟΜΑΔΑ Β

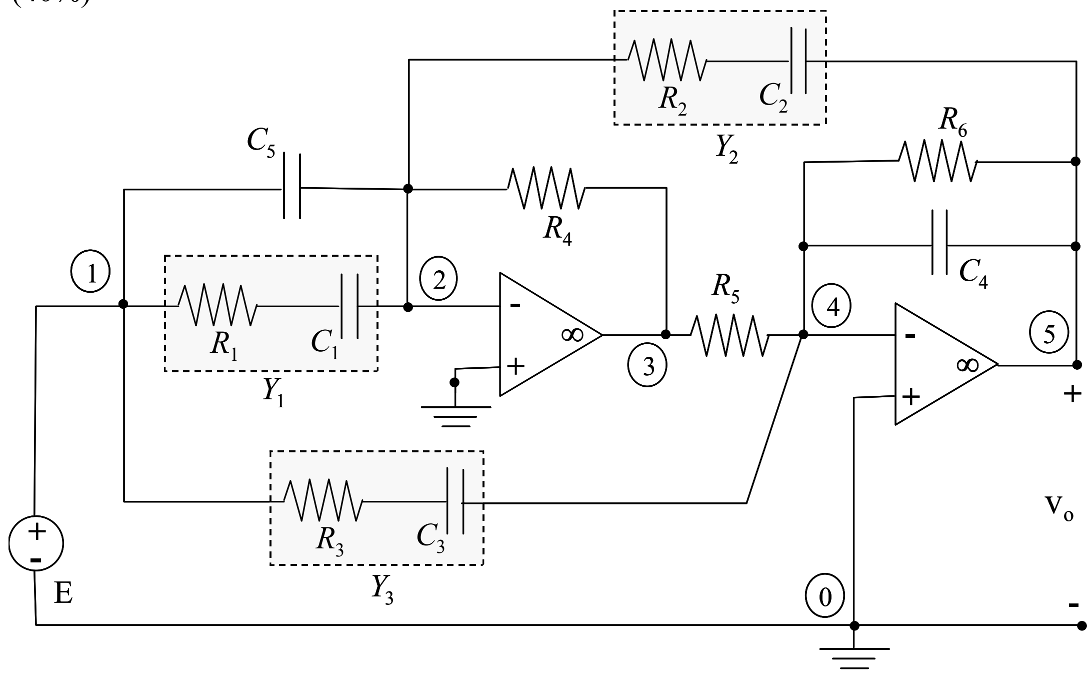
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:____

(Το παρόν επιστρέφεται)

Παρατηρήσεις: - Να γράψετε τον αριθμό των διφύλλων που παραδίδετε
- Να γράψετε το όνομά σας σε κάθε δίφυλλο που παραδίδετε

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

<u>Θέμα 1</u> (40%)



Σχήμα 1

Για το κύκλωμα του παραπάνω Σχήματος 1:

(α) (10%) Να γραφούν οι εξισώσεις της τροποποιημένης μεθόδου των κόμβων με δύο γράφους.

(β) (5%) Να προσδιορισθεί η συνάρτηση μεταφοράς: G(s) = $V_o(s)/E(s)$ εαν $R_4=R_5=1\Omega$, και $C_5=2F$.

(γ) (10%) Εάν $R_1=\frac{2}{4-b}\Omega$, $C_1=(4-b)F$, $R_3=\frac{1}{5-b}\Omega$, $C_3=(5-b)F$, $R_2=R_6=1\Omega$ και $C_2=C_4=1F$, και R_4, R_5, C_5 όπως στο ερώτημα (β), να ευρεθεί για ποιες τιμές του b το σύστημα έχει πόλους και μηδενικά στο αριστερό ημιεπίπεδο (σύστημα ελαχίστης φάσεως).

(δ1) (5%) Για b της επιλογής σας να σχεδιαστεί το ασυμπτωτικό διάγραμμα Bode πλάτους της G(s).

(δ2) (5%) Να ευρεθεί για ποιες τιμές του b το διάγραμμα Bode του (δ1) εξαρτάται από το b.

(δ3) (5%) Να ευρεθεί εαν υπάρχουν τιμές του b ώστε να απειρίζεται η συνάρτηση απόσβεσης για πεπερασμένη κυκλική συχνότητα ω και σε περίπτωση καταφατική να προσδιοριστεί το ω.

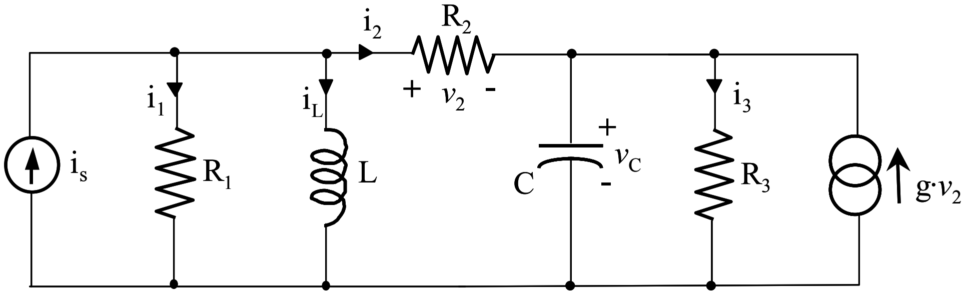
<u>Θέμα 2</u> (30%)

Για το γραμμικό χρονικά αμετάβλητο κύκλωμα του παρακάτω Σχήματος 2, έχουμε: $R_1=R_3=1\Omega$, $C=1F$, και $L=1H$.

(α) (15%) Να γραφούν στο πεδίο του χρόνου οι εξισώσεις κατάστασης του κυκλώματος, καθώς και η εξίσωση εξόδου, θεωρώντας ως έξοδο τη μεταβλητή $y=v_2$, και χρησιμοποιώντας ως μεταβλητές κατάστασης τα v_C, i_L.

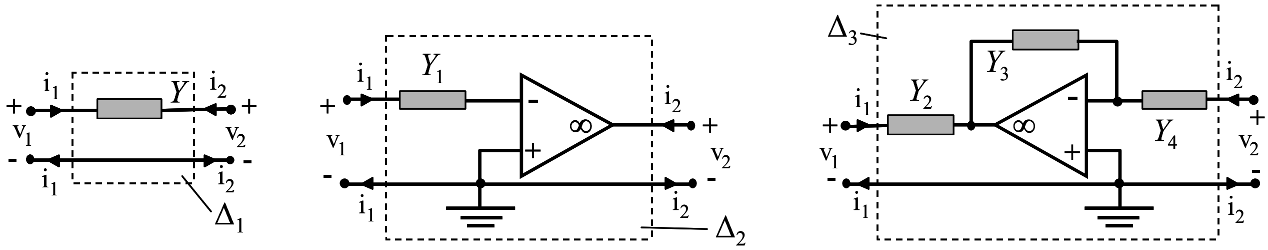
(β) (10%) Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς $H(s)=Y(s)/I_s(s)$ ($R_2=2\Omega$, και $g=0.5S$ στην εξαρτημένη πηγή ρεύματος).

(γ) (5%) Θεωρώντας μηδενικές αρχικές συνθήκες, να προσδιοριστεί αναλυτικά και να σχεδιασθεί η βηματική απόκριση του κυκλώματος.



Σχήμα 2

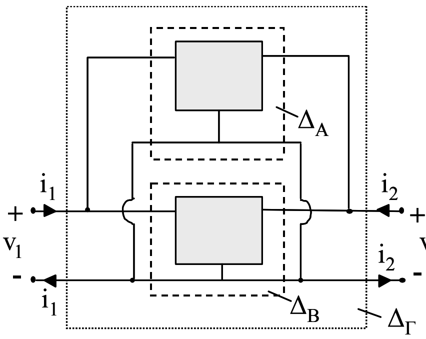
<u>Θέμα 3</u> (40%)



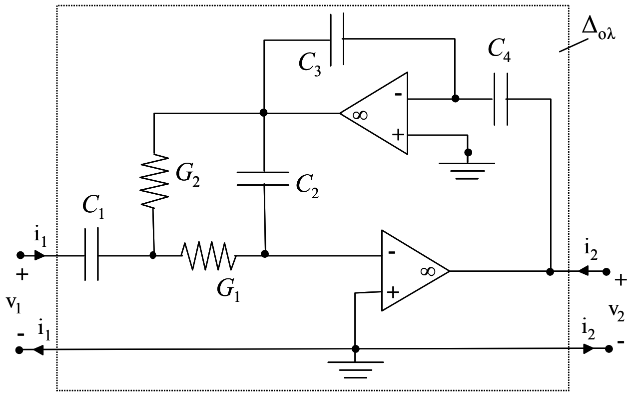
Σχήμα 3-1

(α) (8%) Να ευρεθούν οι μήτρες παραμέτρων μεταφοράς $\mathbf{T}_1$ και $\mathbf{T}_2$ των διθύρων Δ_1 και Δ_2 του Σχήματος 3-1, καθώς και η μήτρα συνθέτων αγωγιμοτήτων βραχυκύκλωσης $\mathbf{Y}_3$ του διθύρου Δ_3 του ίδιου σχήματος.

(β) (8%) Έστω ότι είναι γνωστές οι μήτρες συνθέτων αγωγιμοτήτων βραχυκύκλωσης $\mathbf{Y}_A = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$ του Δ_A, και παραμέτρων μεταφοράς $\mathbf{T}_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ του Δ_B (βλ. Σχήμα 3-2). Υπάρχει η μήτρα συνθέτων αγωγιμοτήτων βραχυκύκλωσης $\mathbf{Y}_B$ του Δ_B; Να ευρεθεί η μήτρα παραμέτρων μεταφοράς $\mathbf{T}_\Gamma$ του συνολικού διθύρου Δ_Γ (αφού γίνει έλεγχος των κριτηρίων Brune).

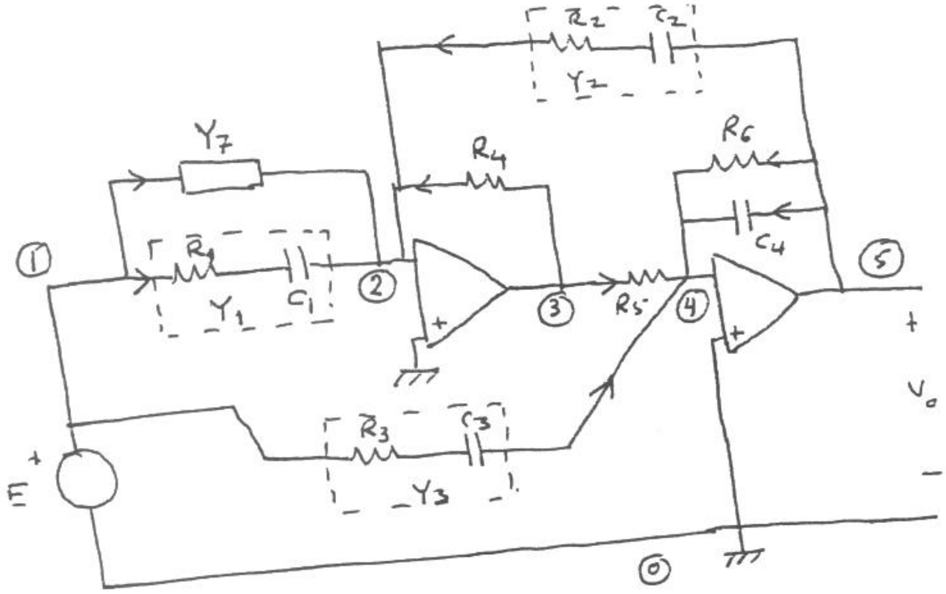


Σχήμα 3-2

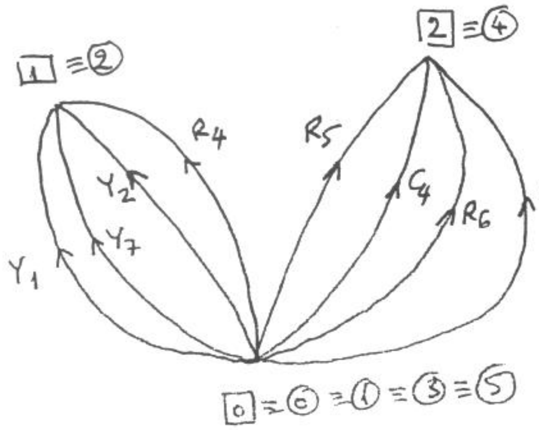


Σχήμα 3-3

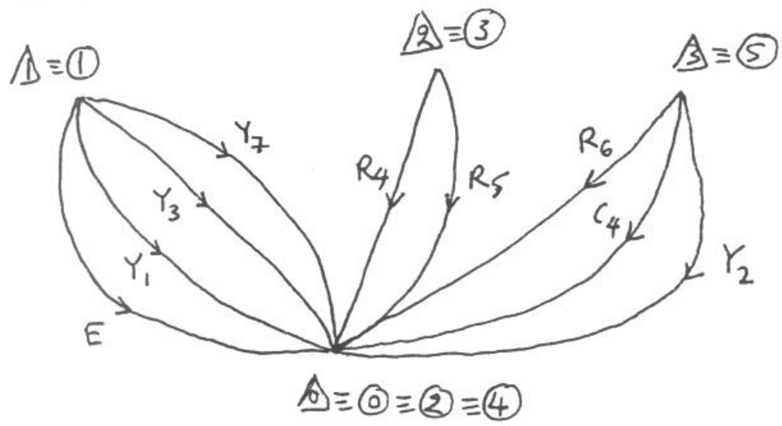
(γ) (24%) Κάνοντας χρήση των αποτελεσμάτων των ερωτημάτων (α) και (β) παραπάνω και του τυπολογίου, να ευρεθεί η μήτρα παραμέτρων μεταφοράς $\mathbf{T}_{ολ}$ του διθύρου του Σχήματος 3-3 καθώς και η συνάρτηση μεταφοράς $G(s)=V_2/V_1$.



Ο I-γράφος είναι



Ο V-γράφος είναι



Οι εξισώσεις της τροποποιημένης μεθόδου των κόμβων με δυο γράφους είναι

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccc} \triangle 1 & \triangle 2 & \triangle 3 \end{array} \\
\begin{array}{c} \boxed{1} \\ \boxed{2} \\ E \end{array} &
\begin{bmatrix} -Y_1 - Y_7 & -G_4 & -Y_2 \\ -Y_3 & -G_5 & -C_4 s - G_6 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} V_{\triangle 1} \\ V_{\triangle 2} \\ V_{\triangle 3} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Καθώς $v_o \equiv v_{⓪} \equiv V_{\triangle 3}$ θα έχουμε

$$
G(s) = \frac{V_o(s)}{E(s)} = \frac{1}{E(s)} \frac{\begin{vmatrix} -Y_1 - Y_7 & -G_4 & 0 \\ -Y_3 & -G_5 & 0 \\ 1 & 0 & E \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -Y_1 - Y_7 & -G_4 & -Y_2 \\ -Y_3 & -G_5 & -C_4 s - G_6 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{G_5(Y_1 + Y_7) - G_4 Y_3}{G_4(C_4 s + G_6) - G_5 Y_2}
$$

Αντικαθιστώντας

$$
Y_1 = \frac{C_1 G_1 s}{G_1 + C_1 s}, \quad Y_2 = \frac{G_2 C_2 s}{G_2 + C_2 s} \quad Y_3 = \frac{G_3 C_3 s}{G_3 + C_3 s}
$$

$$
G_4 = G_5 = 1\,\Omega^{-1}
$$

$$
G(s) = \frac{\dfrac{G_1 C_1 s}{G_1 + C_1 s} + Y_7 - \dfrac{G_3 C_3 s}{G_3 + C_3 s}}{C_4 s + G_6 - \dfrac{G_2 C_2 s}{G_2 + C_2 s}}
$$

ΟΜΑΔΑ Α

$$Y_7 = 2\,\Omega^{-1}$$

$$Y_2 = \frac{s}{s+1}$$

$$Y_3 = \frac{(5-b) \cdot s \cdot (5-b)}{(5-b)(s+1)} = (5-b)\frac{s}{s+1}$$

$$Y_1 = \frac{\frac{4-b}{2} s \cdot (4-b)}{\frac{4-b}{2} s + 4 - b} = \frac{(4-b)s}{s+2}$$

$$G(s) = \frac{(4-b)\frac{s}{s+2} + 2 - (5-b)\frac{s}{s+1}}{s+1-\frac{s}{s+1}} = \frac{\frac{2(s+1)(s+2)+(4-b)(s+s)-(5-b)(\dots}{(s+1)(s+2)}}{\frac{(s+1)^2-s}{(s+1)}} =$$

$$= \frac{s^2+bs+4}{(s^2+s+1)(s+2)}$$

γ) Για να είναι το σύστημα ελάχιστης φάσης πρέπει οι πόλοι και τα μηδενικά να ανήκουν στο αριστερό ημιεπίπεδο. Για τους πόλους εξετάζω τη θέση των ριζών του παράγοντα s^2+s+1 με Routh κριτήριο

s^2	1	1
s	1	0
s^0	1	

$\Rightarrow$ Όλες οι ρίζες στο αριστερό ημιεπίπεδο

Για τα μηδενικά εξετάζω τη θέση των ριζών του παράγοντα s^2+bs+4 με Routh κριτήριο

s^2	1	4
s	b	0
s^0	4	

Ρίζες στο αριστερό ημιεπίπεδο εάν $b>0$

Άρα το σύστημα είναι ελάχιστης φάσης όταν $b>0$

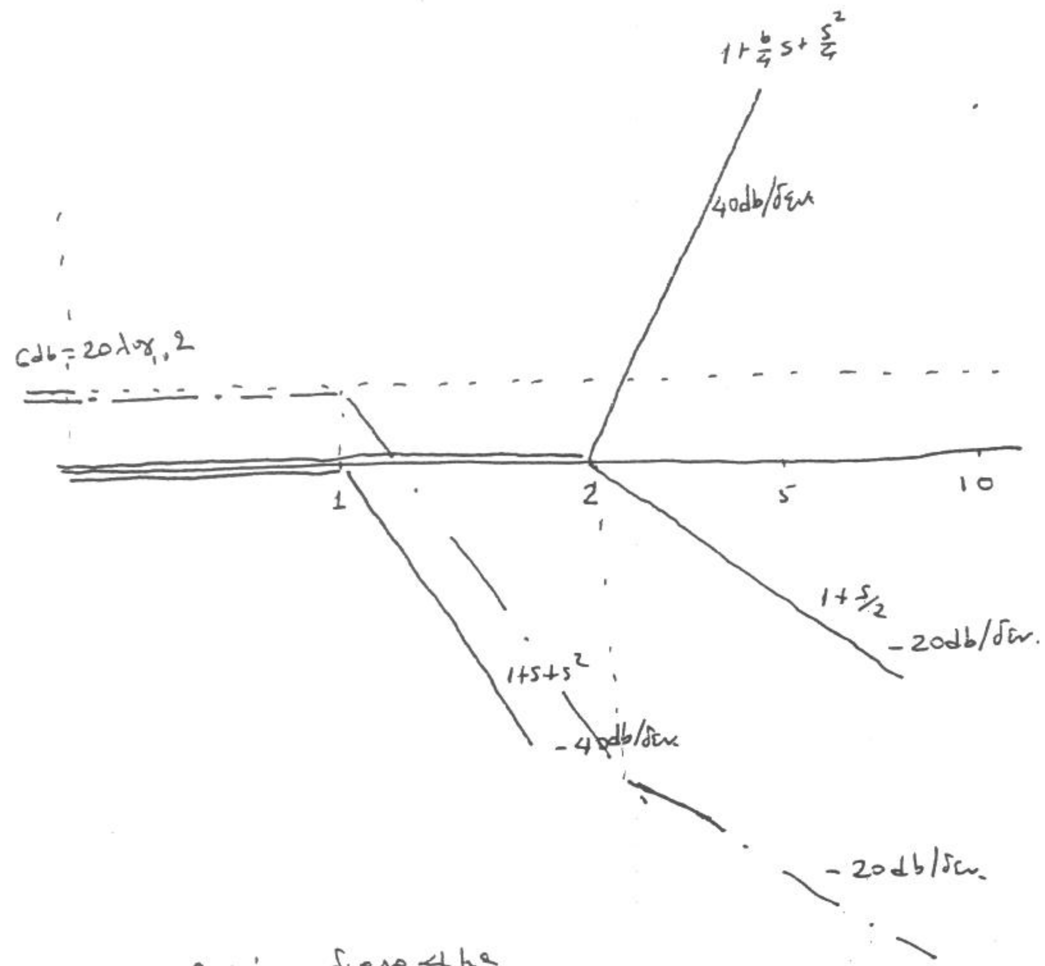
δ). Ας επιλέξουμε $b=2$. Ο αριθμητής θα έχει ρίζες μιγαδικές επειδή $\Delta = 2^2 - 4\cdot 4 = -12 < 0$ και συνεπώς δεν αναλύεται σε πρωτοβάθμιους παράγοντες.

Γράφουμε την $G(s)$ στη παραγοντοποιημένη της μορφή για την κατασκευή του ασυμπτωτικού διαγράμματος Bode ως εξής

$$G(s) = \frac{4\left[1+\frac{b}{4}s+\left(\frac{s}{2}\right)^2\right]}{2(1+s+s^2)\left(1+\frac{s}{2}\right)} = \frac{2\left[1+\frac{b}{4}s+\left(\frac{s}{2}\right)^2\right]}{(1+s+s^2)\left(1+\frac{s}{2}\right)}$$

Οι κρίσιμες συχνότητες θλάσης για τον αριθμητή είναι $\omega=2$ και ο όρος είναι δευτεροβάθμιος

Οι κρίσιμες συχνότητες θλάσης για τον παρονομαστή είναι $\omega=2$ rad/sec και ο όρος είναι πρωτοβάθμιος και $\omega=1$ rad/s και ο όρος είναι δευτεροβάθμιος



—·— ολικό διάγραμμα

Το σύστημα συμπεριφέρεται σαν βαθυπερατό φίλτρο

δ2) Το διάγραμμα Bode (ασυμπτωτικό) δεν εξαρτάται από το b όταν ο παρονομαστής δεν αναλύεται σε πρωτοβάθμιους παράγοντες

ή

$$\Delta = b^2 - 16 < 0$$

από την οποία προκύπτει $|b| < 4$

όταν $|b| > 4$ η $\Delta > 0$ και το ασυμπτωτικό διάγραμμα Bode θα εξαρτάται από το b.

Καθώς η αντίσταση $R_1 = \frac{1}{4-b}$, το b οφείλει να είναι μικρότερο του 4. Άρα η περιοχή τιμών του b θα είναι

$$\boxed{b < -4}$$

δ3) Για να απειρίζεται η συνάρτηση της απόκλισης για $s = j\omega$ και πεπερασμένο ω, η G(s) πρέπει να έχει μηδενικά επάνω στο φανταστικό άξονα και από τον τύπο του τριωνύμου

$b = 0$

Η κυκλική συχνότητα για την οποία απειρίζεται για $b = 0$ είναι

$\omega = 2\,rad/sec$

ΟΜΑΔΑ Β

$Y_7 = 2s$

$Y_2 = \frac{s}{s+1}$

$$Y_3 = \frac{(5-b)(5-b)s}{(5-b)+(5-b)s} = \frac{(5-b)s}{s+1}$$

$$Y_1 = \frac{\frac{4-b}{2}\cdot(4-b)s}{\frac{4-b}{2}+(4-b)s} = \frac{(4-b)s}{1+2s}$$

$$G(s) = \frac{\frac{(4-b)s}{1+2s} + 2s - \frac{(5-b)s}{s+1}}{s+1-\frac{s}{s+1}} = \frac{\frac{(4-b)s^2+(4-b)s+2s(1+3s+2s^2)-(5-b)s-(10-2b)s^2}{(s+1)(1+2s)}}{\frac{s^2+s+1}{s+1}} =$$

$$= \frac{4s^3+bs^2+s}{(1+s+s^2)(1+2s)} = \frac{s(1+bs+4s^2)}{(1+s+s^2)(1+2s)}$$

γ) ο όρος s, καθώς και ο $1+2s$ δεν έχουν ρίζες στο δεξιό ημιεπίπεδο. Εξετάζουμε τους όρους $1+s+s^2$ και $1+bs+4s^2$ με κριτήριο Routh

s^2	1	1
s	1	0
s^0	1	

όχι ρίζες στο δεξιό ημιεπίπεδο αφού οι όροι στην πρώτη στήλη είναι ομόσημοι

s^2	4	1
s	b	0
s^0	1	

$b>0$ για να μην έχει ρίζες στο δεξιό ημιεπίπεδο

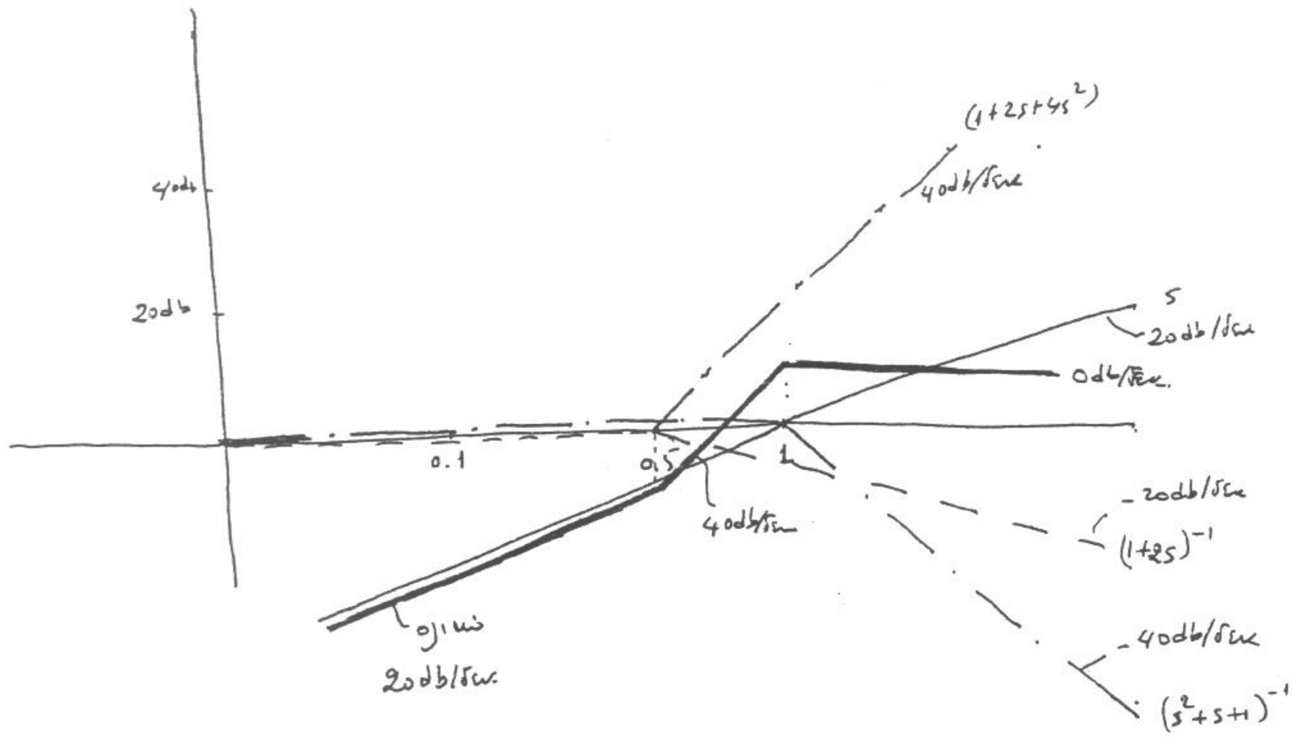
δ) Αν επιλέξουμε $b=2$, ο παράγων $1+bs+4s^2 = 1+2s+4s^2$ και επομένως δεν έχει πραγματικές ρίζες αφού $\Delta = 4-16<0$ και επομένως δεν αναλύεται σε πρωτοβάθμιους παράγοντες.

Όλοι οι όροι είναι στη στάνταρ μορφή γραφής για τη σχεδίαση του ασυμπτωτικού διαγράμματος Bode

Κυκλικές συχνότητες αλλαγής αριθμητή $\omega = \frac{1}{2}$ (δευτεροβάθμιος όρος)

-//- -//- παρονομαστή $\omega = 1$ -//-

$\omega = \frac{1}{2}$ πρωτοβάθμιος όρος



Το κύκλωμα δρα σαν υψηπερατό φίλτρο

δ2) Το διάγραμμα Bode (ασυμπτωτικό) εξαρτάται από το b σαν ο δευτεροβάθμιος όρος $1+bs+4s^2$ παραγοντοποιείται σε δύο πρωτοβάθμιους όρους με πραγματικούς συντελεστές ή ισοδύναμα διαθέτει πραγματικές ρίζες. Αυτό συμβαίνει όταν

$$b^2-16>0 \quad ή \quad |b|>4$$

ή

$$b>4$$
$$-4<b$$

Η λύση $b>4$ απορρίπτεται γιατί αντιστοιχεί σε αρνητική τιμή της αντίστασης R_1

δ3) Η συνάρτηση απόσβεσης είναι

$$A(\omega) = -20\log_{10}|G(j\omega)|.$$

Για να απειρίζεται η $A(\omega)$ πρέπει η $G(j\omega)$ να απειρίζεται σε πεπερασμένο ω (πόλος της $G(s)$ επάνω στο φανταστικό άξονα ή να μηδενίζεται η $G(s)$ για πεπερασμένο ω (μηδενικό της $G(s)$ επάνω στο φανταστικό άξονα.

Οι πόλοι της $G(s)$ δεν ανήκουν στο φανταστικό άξονα ούτε μπορούν να τοποθετηθούν εκεί με κατάλληλη επιλογή του b

Για να έχει και άλλο μηδενικό εκτός του $s=0$ επάνω στο φανταστικό άξονα η $G(s)$ απαιτείται

$$b=0$$

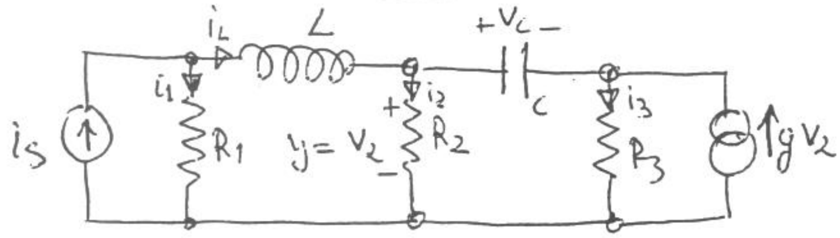
οπότε το ω προκύπτει

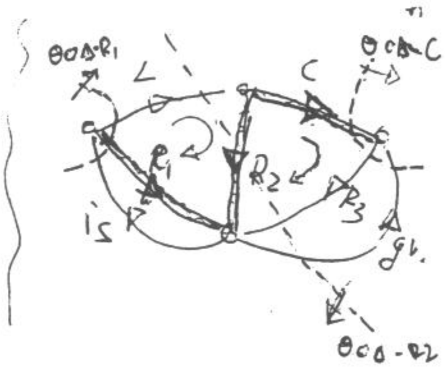
$$\omega = \frac{1}{2}$$

Η συνάρτηση απόδοσης απειρίζεται είναι για

$$\omega = 0$$

Θέμα 2 (ομάδα (Α))





(α) (15%) ($R_1=R_3=1\Omega$, $C=1F$, $L=1H$)

• Θ.Ο.Δ-C: $i_c - i_3 + gv_2 = 0 \Rightarrow \boxed{C\dfrac{dv_c}{dt} = i_3 - gv_2}$ (1)

• Θ.Β.-L: $v_L + v_2 - v_1 = 0 \Rightarrow \boxed{L\dfrac{di_L}{dt} = v_1 - v_2}$ (2)

$\rightarrow i_3, v_2, v_1$

i_3 → Θ.Β-R_3 ($v_3 = R_3 i_3$): $R_3 i_3 - v_2 + v_c = 0 \Rightarrow v_2 - R_3 i_3 = v_c$ (3)

v_2 → Θ.Ο.Δ-R_2 ($i_2 = \frac{v_2}{R_2}$): $\dfrac{v_2}{R_2} - i_L + i_3 - gv_2 = 0 \xRightarrow{(\times R_2)} \underbrace{(1-gR_2)}_{}v_2 + R_2 i_3 = R_2 i_L$ (4)

Θέτουμε $\boxed{K = 1-gR_2}$ (5)

{(3) και (4)} $\Rightarrow$

$$\left\{\begin{aligned}(R_2+KR_3)\, i_3 &= R_2 i_L - K v_c\\ (R_2+KR_3)\, v_2 &= R_2R_3 i_L + R_2 v_c\end{aligned}\right. \quad (6)$$

Τέλος:

v_1 → Θ.Ο.Δ-R_1 ($i_1 = v_1/R_1$): $\dfrac{v_1}{R_1} + i_L - i_s = 0 \Rightarrow v_1 = -R_1 i_L + R_1 i_s$ (7)

$$(1) \xRightarrow{(6)} C\frac{dv_c}{dt} = \left(\frac{R_2}{R_2+KR_3}\right)i_L - \left(\frac{K}{R_2+KR_3}\right)v_c - \left(\frac{gR_2R_3}{R_2+KR_3}\right)i_L - \left(\frac{gR_2}{R_2+KR_3}\right)v_c$$

$$\xRightarrow{(5)} \boxed{C\frac{dv_c}{dt} = -\left(\frac{1}{R_2+KR_3}\right)v_c + \left(\frac{R_2(1-gR_3)}{R_2+KR_3}\right)i_L} \quad (1)'$$

$$(2) \underset{(6)}{\xRightarrow{(7)}} L\frac{di_L}{dt} = -R_1 i_L + R_1 i_s - \left(\frac{R_2R_3}{R_2+KR_3}\right)i_L - \left(\frac{R_2}{R_2+KR_3}\right)v_c$$

$$\Rightarrow \boxed{L\frac{di_L}{dt} = -\left(\frac{R_2}{R_2+KR_3}\right)v_c + \left(-R_1 - \frac{R_2R_3}{R_2+KR_3}\right)i_L + R_1 i_s} \quad (2)'$$

εξισώσεις κατάστασης (1)' και (2)' $(C=1F,\ L=1H)$

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + B i_s \quad , \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} v_C \\ i_L \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -\left(\dfrac{1}{R_2+kR_3}\right)\dfrac{1}{C} & \left(\dfrac{R_2 - gR_2R_3}{R_2+kR_3}\right)\dfrac{1}{C} \\ -\left(\dfrac{R_2}{R_2+kR_3}\right)\dfrac{1}{L} & -\left(R_1 + \dfrac{R_2R_3}{R_2+kR_3}\right)\dfrac{1}{L} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ +R_1/L \end{bmatrix}$$

α_{22}

$\rightarrow k = 1 - gR_2 \Rightarrow$ $\boxed{R_2 + kR_3 = (R_2+R_3) - g(R_2R_3)} = R_2(1-gR_3)+R_3$

$\rightarrow$ $$\boxed{\alpha_{22} = -\left(\frac{R_1(R_2+R_3) + R_2R_3(1-R_1 g)}{(R_2+R_3) - g(R_2R_3)}\right)}$$

Με αντικατάσταση τιμών $R_1 = 1\Omega$, $R_3 = 1\Omega$ $\Rightarrow R_2 + kR_3 = 1 + R_2(1-g)$

$C=1F,\ L=1H$. $R_2 = 0{,}5\Omega$ $g = 2\Omega^{-1}$

$$A = \begin{bmatrix} -\left(\dfrac{1}{1+R_2(1-g)}\right) & \dfrac{R_2(1-g)}{1+R_2(1-g)} \\ -\left(\dfrac{R_2}{1+R_2(1-g)}\right) & -\left(\dfrac{1+R_2+R_2(1-g)}{1+R_2(1-g)}\right) \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Εξίσωση εξόδου: $y = v_2 \overset{(6)}{\Rightarrow} y = \left(\dfrac{R_2}{1+R_2(1-g)}\right)v_C + \left(\dfrac{R_2}{1+R_2(1-g)}\right)i_L$

$y = C\underline{x} + D i_s \rightarrow$ $$C = \begin{bmatrix} \dfrac{R_2}{1+R_2(1-g)} & \dfrac{R_2}{1+R_2(1-g)} \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

2-3

(β) (10%) ($R_2 = 0.5\,\Omega$, $g = 2\,S$)

Με αντικατάσταση των δοσμένων τιμών: $1+R_2(1-g) = 1-0.5 = 0.5$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -\left(\frac{1.5-0.5}{0.5}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$, \quad D = 0$$

Συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(s) = C\,[sI-A]^{-1}B + D$$

$$(sI-A) = \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix} \rightarrow (sI-A)^{-1} = \frac{1}{\psi(s)} \cdot \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}$$

$$\psi(s) = \det(sI-A) = (s+2)^2 - 1 = \underline{s^2+4s+3}$$

$$\rightarrow H(s) = \frac{1}{\psi(s)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\overbrace{-1+s+2}^{s+1}}{s^2+4s+3}$$

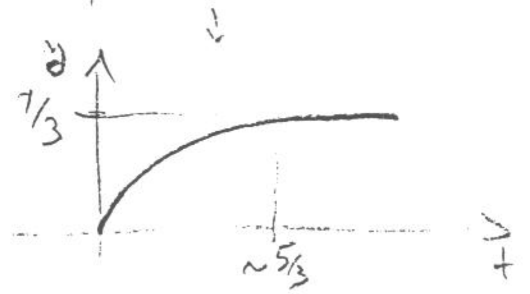
$$\Rightarrow \boxed{H(s) = \frac{s+1}{s^2+4s+3}}$$

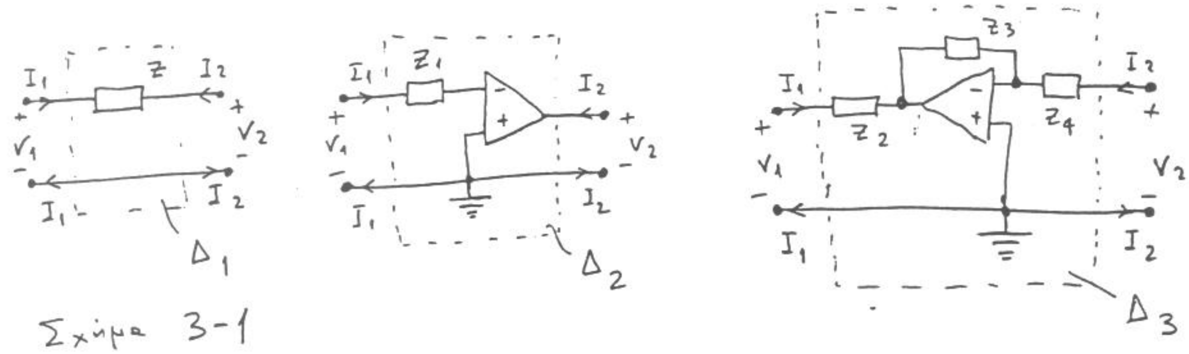
, αλλά $s^2+4s+3 = (s+1)(s+3)$

Άρα: $H(s) = \frac{s+1}{(s+1)(s+3)} = \frac{1}{s+3}$

(γ) (5%) Βηματική απόκριση $y_u(t)$ για είσοδο $\mathcal{L}(u(t)) = U(s) = \frac{1}{s}$

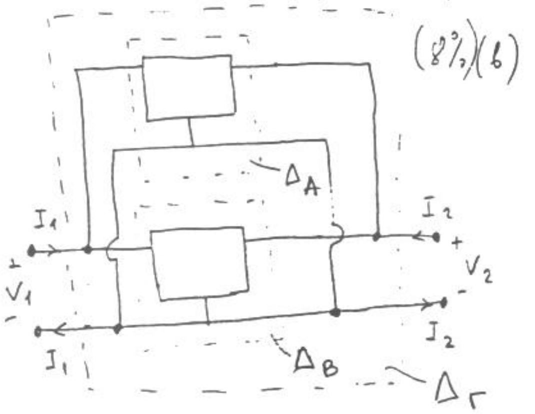
$$Y_u(s) = \frac{1}{s(s+3)} = \frac{(1/3)}{s} - \frac{(1/3)}{s+3} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \boxed{y_u(t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-3t}}$$





Σχήμα 3-1

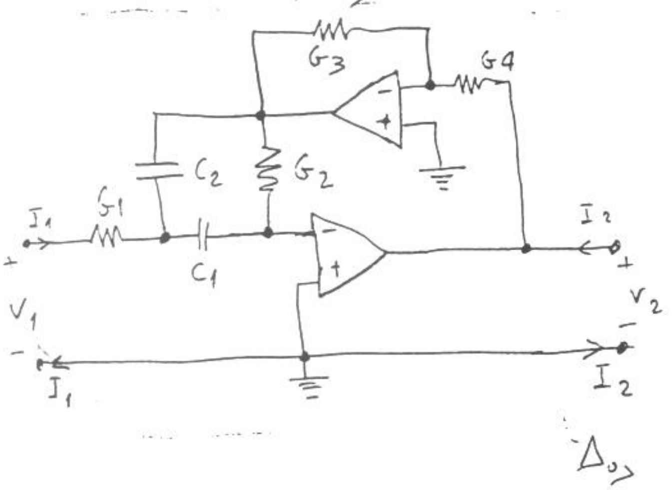
7%) (α) Να ευρεθούν οι μήτρες παραμέτρων μεταφοράς T_1 και T_2 των διθύρων Δ_1 και Δ_2 του Σχήματος 3-1, καθώς και η μήτρα συνθέτων αγωγιμοτήτων βραχυκύκλωσης Y_3 του διθύρου Δ_3 του ιδίου σχήματος.



Σχήμα 3-2

(8%) (β) Έστω ότι είναι γνωστές οι μήτρες συνθέτων αγωγιμοτήτων βραχυκύκλωσης $Y_A = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$ του Δ_A, και παραμέτρων μεταφοράς $T_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ του Δ_B (βλ. Σχήμα 3-2). Υπάρχει η μήτρα συνθέτων αγωγιμοτήτων βραχυκύκλωσης Y_B του Δ_B; Να ευρεθεί η μήτρα παραμέτρων μεταφοράς T_Γ του συνολικού διθύρου Δ_Γ (αφού γίνει έλεγχος των κριτηρίων Brune).

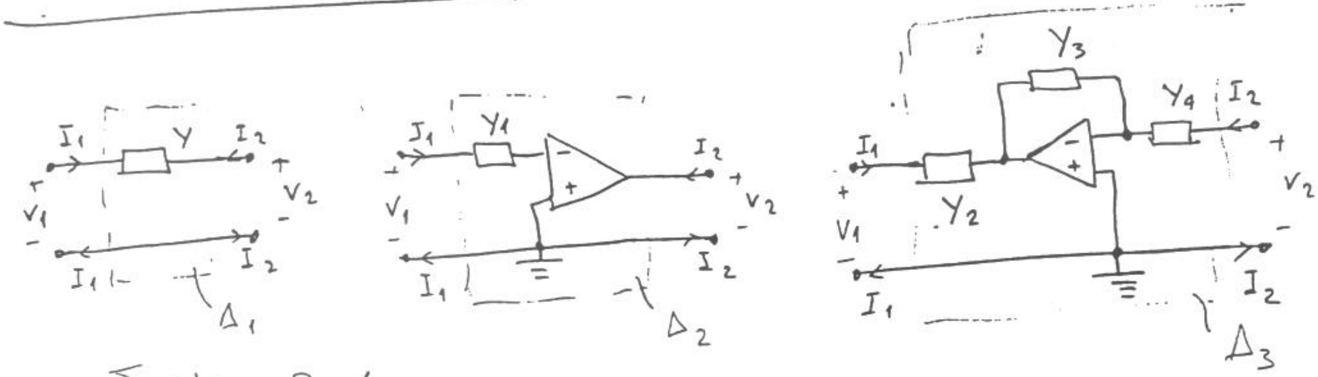
24%) (γ) Κάνοντας χρήση των αποτελεσμάτων των ερωτημάτων (α) και (β) παραπάνω, και του ωποσογίου να ευρεθεί η μήτρα παραμέτρων μεταφοράς $T_{ολ}$ του διθύρου του Σχήματος 3-3, καθώς και η συνάρτηση μεταφοράς $G(s) = \frac{V_2}{V_1}$



Ομάδα Α

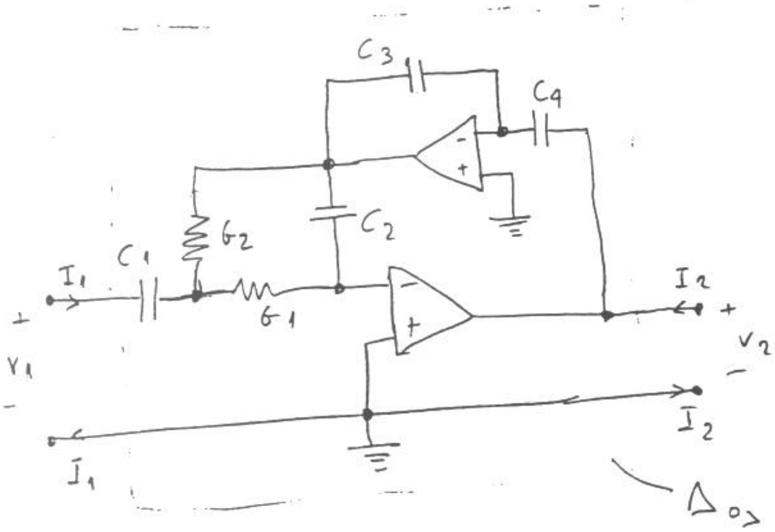
Σχήμα 3-3

Σχήματα για την Ομάδα Β



Σχήμα 3-1

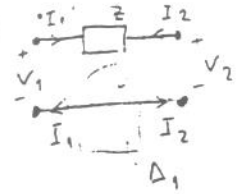
Σχήμα 3-2 το ίδιο με ομάδα Α



Σχήμα 3-3

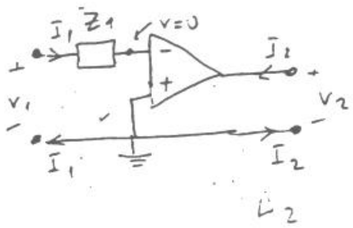
A

(α)



παράμετροι T:

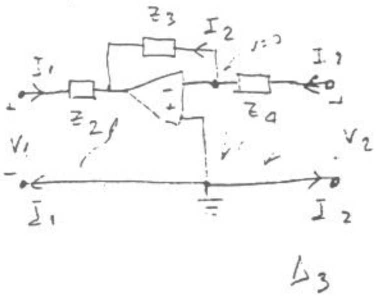
$$\left.\begin{aligned} &I_1=-I_2 \\ &-V_1+I_1Z+V_2=0 \Rightarrow V_1=V_2-I_2Z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{T_1} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$



Παράμετροι T:

λόγω Τ.Ε.: $I_1=0$

$$\left.\begin{aligned} &I_1=0 \\ &-V_1+I_1Z_1=0 \Rightarrow V_1=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{T_2} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$



παράμετροι Y:

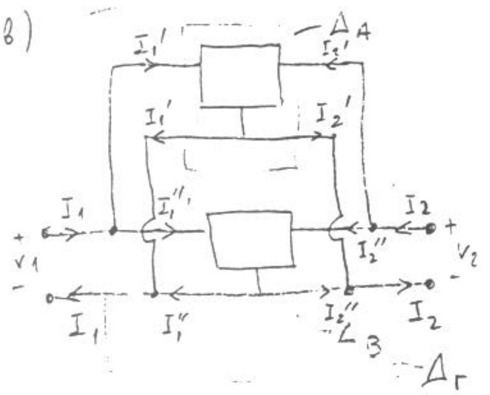
$$-I_2Z_4+V_2=0 \Rightarrow I_2=\frac{V_2}{Z_4}$$

$$-V_1+I_1Z_2-I_2Z_3=0 \Rightarrow I_1=\frac{1}{Z_2}(V_1+I_2Z_3)=\frac{V_1}{Z_2}+I_2\frac{Z_3}{Z_2}$$

$$=\frac{V_1}{Z_2}+V_2\frac{Z_3}{Z_2Z_4}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{Z_2} & \frac{Z_3}{Z_2Z_4} \\ 0 & \frac{1}{Z_4} \end{bmatrix}}_{Y_3} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

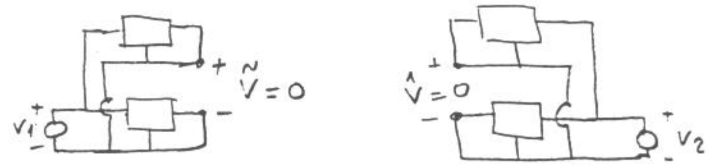
(β)



Αν $T_B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ και $Y_A=\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$, να ευρεθεί T_Γ.

Σύνδεση παράλληλη-παράλληλη.

Κριτήρια Brune:



Κριτήρια Brune ισχύουν, επομένως:

(i) τα Δ_A και Δ_B είναι δίθυρα μετά την παράλληλη-παράλληλη σύνδεση

(ii) ισχύει $Y_\Gamma = Y_A + Y_B$. Όμως Y_B δεν υπάρχει.

Λόγω (i) ισχύουν:

για Δ_A: $I_1' = y_{11}V_1 + y_{12}V_2$

$I_2' = y_{21}V_1 + y_{22}V_2$

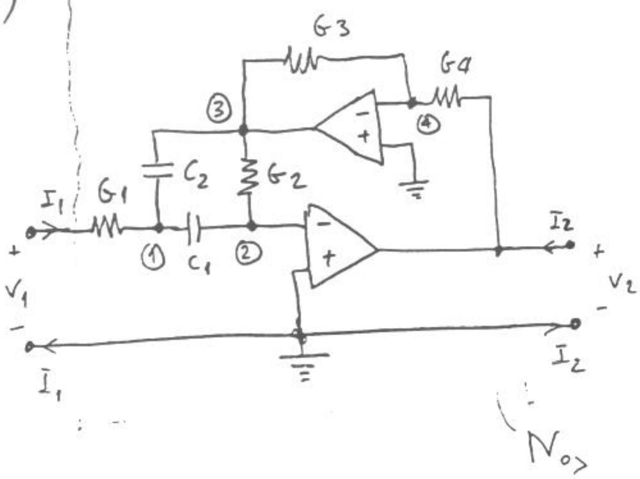
για Δ_B: $V_1=0$, $I_1''=0$

από σύνδεση: $I_1=I_1'+I_1'' \Rightarrow I_1 = y_{11}\overset{0}{V_1}+y_{12}V_2+0=y_{12}V_2$

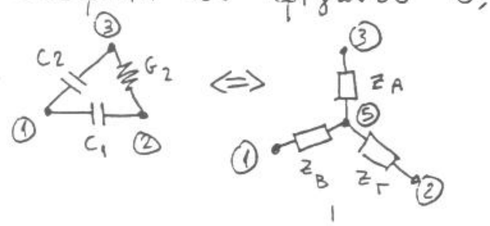
$I_2=I_2'+I_2''$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y_{12} & 0 \end{bmatrix}}^{T_\Gamma} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

(γ) Να βρεθούν παράμετροι T για το $N_{o\gamma}$.



Μετατροπή του τριγώνου ①, ②, ③ σε αστέρα:



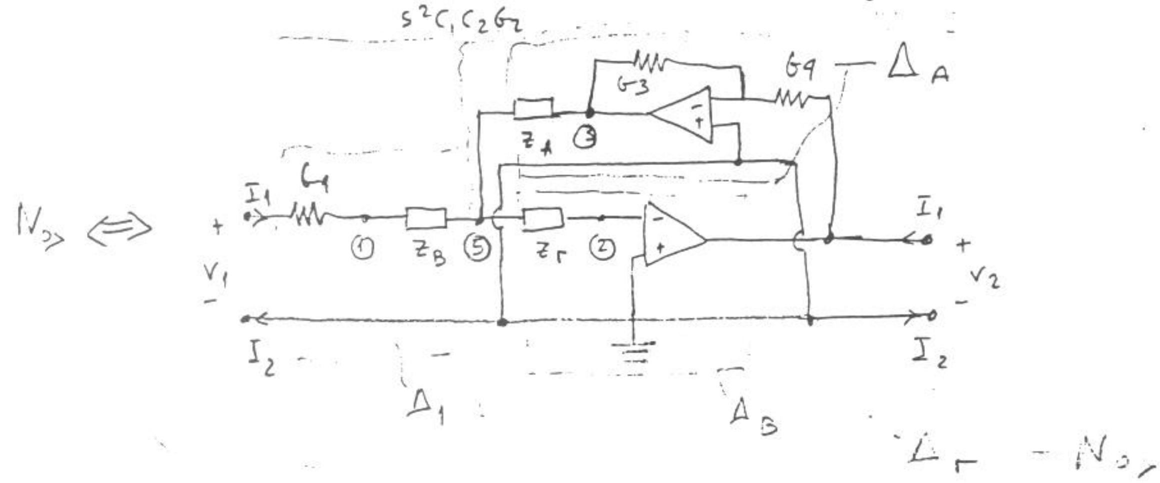
όπου $z_1 = \frac{1}{sC_2}$, $z_2 = \frac{1}{G_2}$, $z_3 = \frac{1}{sC_1}$

$$z_1 + z_2 + z_3 = \frac{1}{sC_1} + \frac{1}{sC_2} + \frac{1}{G_2} = \frac{s^2C_1C_2 + sC_1G_2 + sC_2G_2}{s^2C_1C_2G_2}$$

$$z_A = \frac{z_1 z_2}{z_1+z_2+z_3} = \frac{\frac{1}{sC_2G_2}}{\frac{s^2C_1C_2 + s(C_1+C_2)G_2}{s^2C_1C_2G_2}} = \frac{sC_1}{s^2C_1C_2 + s(C_1+C_2)G_2}$$

$$z_B = \frac{z_1 z_3}{z_1+z_2+z_3} = \frac{\frac{1}{s^2C_1C_2}}{\frac{s^2C_1C_2 + s(C_1+C_2)G_2}{s^2C_1C_2G_2}} = \frac{G_2}{s^2C_1C_2 + s(C_1+C_2)G_2}$$

$$z_\Gamma = \frac{z_2 z_3}{z_1+z_2+z_3} = \frac{\frac{1}{sC_1G_2}}{\frac{s^2C_1C_2 + s(C_1+C_2)G_2}{s^2C_1C_2G_2}} = \frac{sC_2}{s^2C_1C_2 + s(C_1+C_2)G_2}$$



$N_{o\gamma}$ = αλυσωτή σύνδεση των Δ_1 και Δ_Γ

Δ_Γ = παράλληλη-παράλληλη σύνδεση των Δ_A και Δ_B

από ερώτημα (α):

$$T_{\Delta_1} = \begin{bmatrix} 1 & z_B + \frac{1}{G_1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_{\Delta_B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y_{\Delta_A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{z_A} & \frac{G_4}{G_3 z_A} \\ 0 & G_4 \end{bmatrix}$$

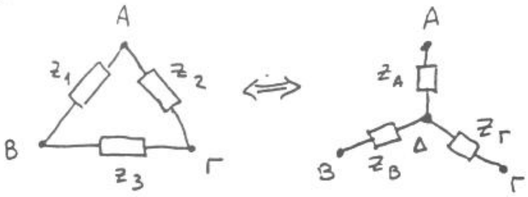
από ερώτημα (β): $T_{\Delta_\Gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (y_{12})_{\Delta_A} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{G_4}{G_3 z_A} & 0 \end{bmatrix}$.

$$T_{No\gamma} = T_{\Delta_1} \cdot T_{\Delta_\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 & z_B + \frac{1}{G_1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{G_4}{G_3 z_A} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{G_4}{G_3 z_A}\left(z_B + \frac{1}{G_1}\right) & 0 \\ \frac{G_4}{G_3 z_A} & 0 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{V_2}{V_1} = k_V \Big|_{Z_\ell \to \infty} = \frac{Z_\ell}{B + A Z_\ell}\Big|_{Z_\ell \to \infty} = \frac{1}{\frac{B}{Z_\ell} + A}\Big|_{Z_\ell \to \infty} = \frac{1}{A}$$

$$= \frac{G_3 G_1 z_A}{G_4 (1 + z_B G_1)} = \frac{G_3 G_1 \frac{s C_1}{s^2 C_1 C_2 + s(C_1 + C_2) G_2}}{G_4 \left(1 + \frac{G_1 G_2}{s^2 C_1 C_2 + s(C_1 + C_2) G_2}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad G(s) = \frac{s C_1 G_1 G_3}{G_4 \left(s^2 C_1 C_2 + s(C_1 + C_2) G_2 + G_1 G_2\right)}$$



όπου

$$\left.\begin{aligned} Z_A &= \frac{Z_1 Z_2}{Z_1+Z_2+Z_3} \\ Z_B &= \frac{Z_1 Z_3}{Z_1+Z_2+Z_3} \\ Z_Γ &= \frac{Z_2 Z_3}{Z_1+Z_2+Z_3} \end{aligned}\right\}$$

ή

$$\left\{\begin{aligned} Z_1 &= \frac{Z_A Z_B + Z_B Z_Γ + Z_A Z_Γ}{Z_Γ} \\ Z_2 &= \frac{Z_A Z_B + Z_B Z_Γ + Z_A Z_Γ}{Z_B} \\ Z_3 &= \frac{Z_A Z_B + Z_B Z_Γ + Z_A Z_Γ}{Z_A} \end{aligned}\right.$$

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ