ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧ/ΚΩΝ & ΜΗΧ/ΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

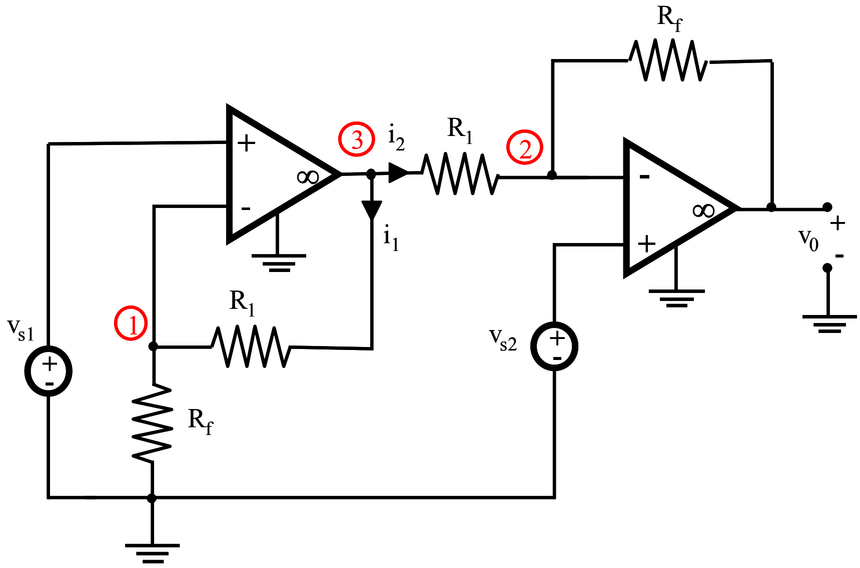
Μάθημα: "ΘΕΩΡΙΑ ΔΙΚΤΥΩΝ" (5ο εξάμηνο)

Ακαδ. Έτος: 2002-2003

2ο Τμήμα (Κ-Μ), Διδάσκων: Κ. Τζαφέστας

Λύσεις 1ης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1-1 (*Κύκλωμα τελεστικών ενισχυτών*)



Σχήμα 1-1

Η άσκηση αυτή λύνεται εύκολα! εκφράζοντας απ'ευθείας (εποπτικά) την τάση εξόδου v_0, διαδοχικά σε συνάρτηση των τάσεων κόμβων e_2, e_3, e_1, και τελικά των v_{s2} και v_{s1}.

(α) Έστω i_1 το ρεύμα το οποίο διατρέχει τις αντιστάσεις R_1 και R_f από την έξοδο του 1ου τελεστικού ενισχυτή (T1) μέσω του κόμβου 1 προς τη γείωση, και i_2 το ρεύμα το οποίο εξέρχεται από τον ακροδέκτη εξόδου του T1 προς το 2ο τελεστικό ενισχυτή (T2) μέσω της αντιστάσεως R_1 η οποία προσπίπτει στον κόμβο 2 (βλέπε Σχήμα 1-1).

Έχουμε για το *δεύτερο τελεστικό ενισχυτή* (T2):

$$v_0 = e_2 - i_2 R_f \qquad \text{(T2-1)}$$

(θεωρούμε φυσικά i_-=0, και i_+=0 για τους δύο τελεστικούς ενισχυτές), και

$$e_2 = v_{s2} \qquad \text{(T2-2)}$$

(δεδομένου ότι θεωρούμε πως οι δύο τελεστικοί ενισχυτές -απείρου κέρδους- λειτουργούν στη γραμμική περιοχή, απ'όπου: $v_d = v_+ - v_- = 0$, και για τους δύο τελεστικούς ενισχυτές).

Παίρνουμε επομένως, από τις σχέσεις (T2-1 και 2):

$$v_0 = v_{s2} - i_2 R_f \qquad (1)$$

Αλλά, από τον κλάδο σύνδεσης του ακροδέκτη εξόδου του T1 με τη θύρα εισόδου του T2, παίρνουμε :

$$i_2 R_1 = e_3 - e_2 \;\Rightarrow\; i_2 R_f = (e_3 - e_2)(R_f/R_1) \qquad (2)$$

Συνδυάζοντας τις (1) και (2), και χρησιμοποιώντας την (Τ2-2), παίρνουμε:

$$v_0 = (1+R_f/R_1)\ v_{s2} - (R_f/R_1)\ e_3 \qquad (3)$$

Για τον *πρώτο τελεστικό ενισχυτή* (Τ1) έχουμε αντίστοιχα:

$$e_3 = i_1 R_1 + e_1 \qquad (T1\text{-}1)$$

$$e_1 = v_{s1} \ \text{ και } \ e_1 = i_1 R_f \qquad (T1\text{-}2)$$

απ'όπου:

$$e_3 = (1 + R_1/R_f)\ v_{s1} \qquad (4)$$

Συνδυάζοντας τώρα τις (3) και (4) παίρνουμε τελικά:

$$\boxed{v_0 = \left(1 + \frac{R_f}{R_1}\right)\left(v_{s2} - v_{s1}\right)} \qquad (5)$$

που είναι η ζητούμενη σχέση.

(β) Για να λειτουργούν οι τελεστικοί ενισχυτές, όπως υποθέσαμε, στη γραμμική περιοχή πρέπει να ισχύει:

(Τ1): $-E_{sat} < e_3 < E_{sat}$, οπότε από τη σχέση (4) $\Rightarrow$

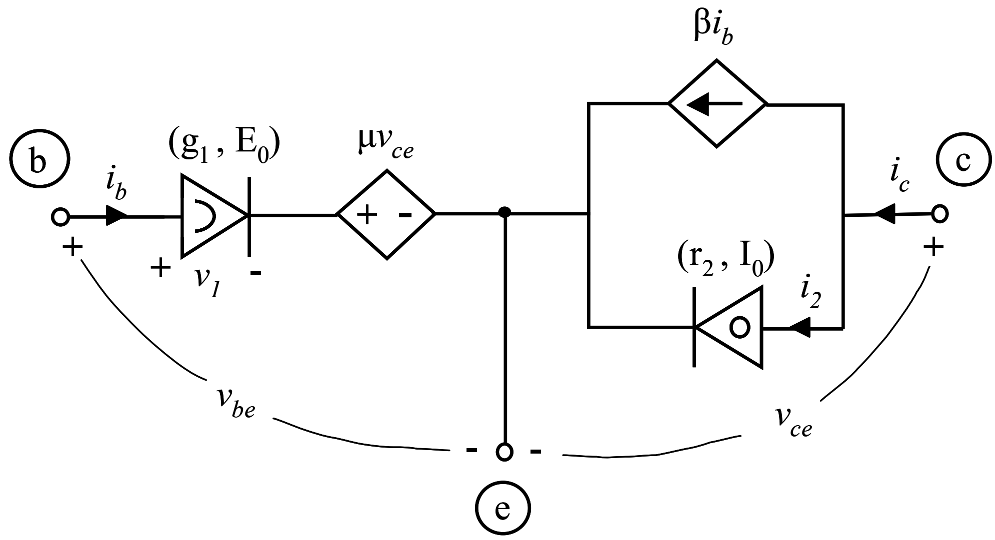
$$-\left(\frac{R_f}{R_1 + R_f}\right)E_{sat} < v_{s1} < \left(\frac{R_f}{R_1 + R_f}\right)E_{sat} \qquad (6)$$

(Τ2): $-E_{sat} < v_0 < E_{sat}$, οπότε από τις σχέσεις (5) και (6) $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} -\left(\dfrac{R_1}{R_1 + R_f}\right)E_{sat} < v_{s2} - v_{s1} < \left(\dfrac{R_1}{R_1 + R_f}\right)E_{sat} \\ -\left(\dfrac{R_f}{R_1 + R_f}\right)E_{sat} < v_{s1} < \left(\dfrac{R_f}{R_1 + R_f}\right)E_{sat} \end{array}\right\} \Rightarrow \ -E_{sat} < v_{s2} < E_{sat} \qquad (7)$$

Οι (6) και (7) είναι οι ζητούμενες συνθήκες, για τις ανεξάρτητες πηγές εισόδου v_{s1} και v_{s2}, ώστε οι Τ1 και Τ2 να βρίσκονται όντως στη γραμμική περιοχή λειτουργίας, και να ισχύει έτσι η ανάλυση του ερωτήματος (α).

<u>Άσκηση 1-2</u> (*DC ανάλυση τρανζίστορ*)



Σχήμα 1-2(α): Τμηματικά γραμμικό μοντέλο τρανζίστορ ένωσης (npn) σε συνδεσμολογία κοινού εκπομπού.

Ξεκινούμε γράφοντας κατ'αρχάς τις εξισώσεις που περιγράφουν τη v-i χαρακτηριστική για τη θύρα εισόδου και εξόδου του τρανζίστορ, όταν αυτό μοντελοποιείται προσεγγιστικά από το τμηματικά γραμμικό μοντέλο του Σχήματος 1-2(α). Έχουμε:

- *Θύρα εισόδου* (βάση-εκπομπός): $v_{be} = v_1 + \mu v_{ce}$, όπου v_1 η τάση στα άκρα του κοίλου αντιστάτη (g_1, E_0), για τον οποίο έχουμε:

$$i_b = \frac{g_1}{2}\left(|v_1 - E_0| + (v_1 - E_0)\right) = \begin{cases} g_1(v_1 - E_0) & \text{, when } v_1 \geq E_0 \\ 0 & \text{, when } v_1 < E_0 \end{cases}$$

δηλαδή:

$$i_b = \begin{cases} g_1(v_{be} - \mu v_{ce} - E_0) & \text{, when } v_{be} \geq E_0 + \mu v_{ce} \\ 0 & \text{, when } v_{be} < E_0 + \mu v_{ce} \end{cases} \tag{1}$$

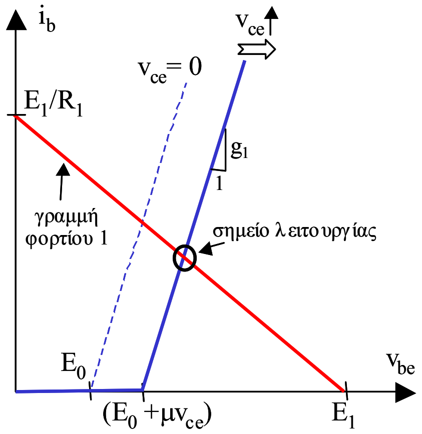
- *Θύρα εξόδου* (συλλέκτης-εκπομπός): $i_c = i_2 + \beta i_b$, όπου i_2 το ρεύμα που διατρέχει τον κυρτό αντιστάτη (r_2, I_0), για τον οποίο έχουμε:

$$v_{ce} = \frac{r_2}{2}\left(|i_2 - I_0| + (i_2 - I_0)\right) = \begin{cases} r_2(i_2 - I_0) & \text{, when } i_2 \geq I_0 \\ 0 & \text{, when } i_2 < I_0 \end{cases}$$

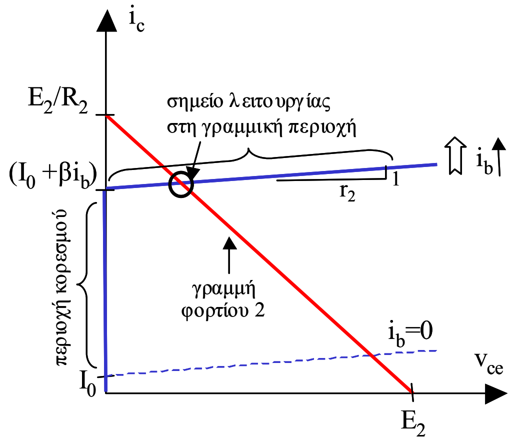
δηλαδή:

$$v_{ce} = \begin{cases} r_2(i_c - \beta i_b - I_0) & \text{, when } i_c \geq I_0 + \beta i_b \\ 0 & \text{, when } i_c < I_0 + \beta i_b \end{cases} \tag{2}$$

Οι χαρακτηριστικές i_b–v_{be} (εξαρτόμενη από το v_{ce}) και i_c–v_{ce} (εξαρτόμενη από το i_b), για το συγκεκριμένο τμηματικά γραμμικό μοντέλο τρανζίστορ ένωσης σε συνδεσμολογία κοινού εκπομπού φαίνονται στα Σχήματα 1-2 (γ) και (δ), αντίστοιχα.



1-2(γ) Θύρα εισόδου: χαρακτηριστική i_b-v_{be} και γραμμή φορτίου (κύκλωμα πόλωσης)



1-2(δ) Θύρα εξόδου: χαρακτηριστική i_c-v_{ce} και γραμμή φορτίου (κύκλωμα πόλωσης)

Στα ίδια σχήματα έχουμε υπερθέσει και τις γραμμές φορτίου (load lines) 1 και 2, για τη θύα εισόδου και τη θύρα εξόδου αντίστοιχα, για τις οποίες (από το κύκλωμα του Σχήματος 1-2(β) της άσκησης) έχουμε:

- Κύκλωμα πόλωσης θύρας εισόδου / γραμμή φορτίου-1:

  $v_{be} = E_1 - i_b R_1$ (3)

- Κύκλωμα πόλωσης θύρας εξόδου / γραμμή φορτίου-2:

  $v_{ce} = E_2 - i_c R_2$ (4)

Κατ'αρχάς για τη θύρα εισόδου, συνδυάζοντας τις σχέσεις (1) και (3) (χαρακτηριστική εισόδου και κύκλωμα πόλωσης θύρας εισόδου, αντίστοιχα) παίρνουμε για το σημείο λειτουργίας:

$$i_b = \left\{ \begin{array}{ll} g_1(E_1 - i_b R_1 - \mu v_{ce} - E_0) & \text{, when } E_1 - i_b R_1 \geq E_0 + \mu v_{ce} \\ 0 & \text{, when } E_1 - i_b R_1 < E_0 + \mu v_{ce} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$i_b = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{g_1}{(1+g_1 R_1)}(E_1 - E_0 - \mu v_{ce}) & \text{, when } E_1 - E_0 - \mu v_{ce} \geq i_b R_1 > 0 \\ 0 & \text{, when } E_1 - E_0 - \mu v_{ce} < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} i_b = \dfrac{g_1}{(1+g_1 R_1)}(E_1 - E_0 - \mu v_{ce}), \text{ when } E_1 - E_0 - \mu v_{ce} \geq i_b R_1 > 0 & \text{(5-α)} \\ \text{ή} & \\ i_b = 0, \text{ when } \mu v_{ce} > E_1 - E_0 & \text{(5-β)} \end{array}}$$

(παρατηρούμε φυσικά, από τη σχέση (5-α), ότι η τιμή του i_b στο σημείο λειτουργίας εξαρτάται απο το v_{ce})

Αντικαθιστώντας τις δεδομένες τιμές του προβλήματος στη συνθήκη της σχέσης (5-β), παίρνουμε: $0.1\ v_{ce} > 5 - 0.25 \Leftrightarrow 0.1\ v_{ce} > 4.75 \Leftrightarrow v_{ce} > 40.75V$, το οποίο λόγω της (4) σημαίνει: $i_c R_2 < E_2 - 40.75V \Leftrightarrow i_c < -63.5mA < 0$, που είναι μη αποδεκτή λύση, καθώς κάτι τέτοιο θα σήμαινε (βλέπε Σχήμα 1-2(δ)) $i_b<0$, που είναι αδύνατο λόγω του κοίλου αντιστάτη στη θύρα εισόδου. Άρα, από το κύκλωμα της θύρας εισόδου κρατάμε τη σχέση (5-α), που σημαίνει ότι το τρανζίστορ δεν μπορεί για τις δεδομένες τιμές του συγκεκριμένου κυκλώματος να λειτουργεί στην *περιοχή αποκοπής* (διακόπτης ανοικτός, i_b=0, και $i_c \approx 0$), δηλαδή έχουμε: $i_b>0$.

Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 1-2(δ), οι δύο δυνατές περιοχές λειτουργίας του κυκλώματος είναι επομένως: η *γραμμική περιοχή* ($i_c \approx \beta i_b$) και η *περιοχή κορεσμού* (διακόπτης κλειστός, v_{ce}=0).

Πιο συγκεκριμένα, για τη θύρα εξόδου, συνδυάζοντας τις σχέσεις (2) και (4) (χαρακτηριστική i-v εξόδου και κύκλωμα πόλωσης θύρας εξόδου, αντίστοιχα) παίρνουμε για το σημείο λειτουργίας:

$$E_2 - i_c R_2 = \begin{cases} r_2(i_c - \beta i_b - I_0) & \text{, when } i_c \geq I_0 + \beta i_b \\ 0 & \text{, when } i_c < I_0 + \beta i_b \end{cases}$$

$$i_c = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{R_2 + r_2}\right)\left[E_2 + r_2(\beta i_b + I_0)\right] & \text{, when } i_c \geq I_0 + \beta i_b \\ E_2 / R_2 & \text{, when } i_c < I_0 + \beta i_b \end{cases}$$

και από τη σχέση (4):

- <u>Γραμμική περιοχή λειτουργίας:</u>

$$v_{ce} = \frac{r_2}{\left(R_2 + r_2\right)}\left[E_2 - R_2\left(\beta i_b + I_0\right)\right], \quad \text{when } i_c \geq I_0 + \beta i_b \qquad (6\text{-α})$$

ή

- <u>Περιοχή κορεσμού:</u>

$$v_{ce} = 0, \quad \text{when } I_0 \leq i_c < I_0 + \beta i_b \quad (i_b \geq 0) \qquad (6\text{-β})$$

- Θεωρούμε αρχικά ότι το τρανζίστορ βρίσκεται στη *γραμμική περιοχή λειτουργίας* (βλέπε Σχήμα 1-2(δ)), οπότε συνδυάζοντας τις σχέσεις (6-α) και (5-α) παίρνουμε:

$$i_b = \frac{g_1}{\left(1 + g_1 R_1\right)}\left[(E_1 - E_0) - \mu\left(\frac{r_2}{R_2 + r_2}\right)\left(E_2 - R_2(\beta i_b + I_0)\right)\right] \Leftrightarrow$$

$$\left(1 - \mu\beta\left(\frac{g_1}{\left(1 + g_1 R_1\right)} \cdot \frac{r_2 R_2}{(R_2 + r_2)}\right)\right) i_b = \frac{g_1}{\left(1 + g_1 R_1\right)}\left(E_1 - E_0 - \mu\left(\frac{r_2}{R_2 + r_2}\right)(E_2 - R_2 I_0)\right) \Leftrightarrow$$

$$\boxed{i_b = \frac{\left[\left(R_2 + r_2\right)\left(E_1 - E_0\right) - \mu r_2 (E_2 - R_2 I_0)\right]}{\left(r_1 + R_1\right)\left(R_2 + r_2\right) - \mu\beta r_2 R_2}} \qquad (7)$$

(όπου έχουμε θέσει: $r_1=1/g_1$)

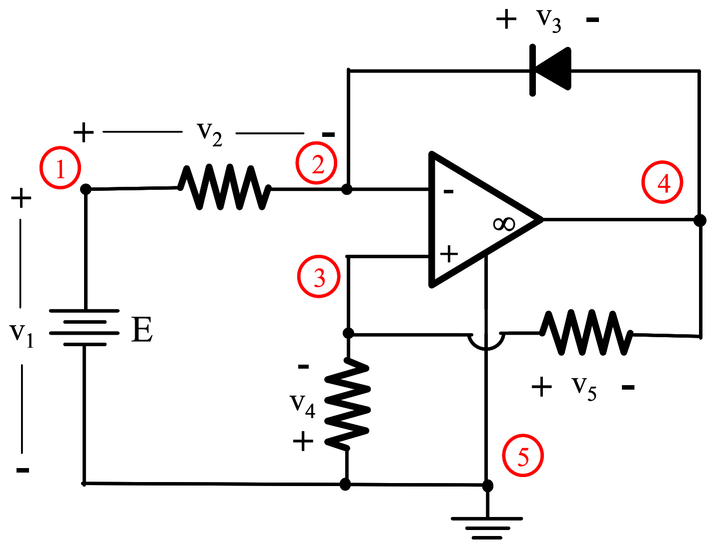
Αντικαθιστώντας τις δεδομένες τιμές της άσκησης παίρνουμε: $i_b \approx -0.78$mA < 0, που είναι μη αποδεκτή λύση. Συμπεραίνουμε επομένως ότι ***το τρανζίστορ λειτουργεί στην περιοχή κορεσμού*** και έχουμε από τις σχέσεις (6-β) και (5-α):

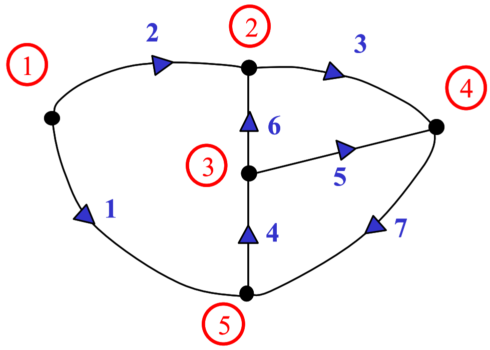
v_{ce}=0, και $i_{ce}=E_2/R_2$=18mA,

καθώς και

$$i_b = \frac{(E_1 - E_0)}{\left(r_1 + R_1\right)} = 79.2\text{mA} \quad \text{και} \quad v_{be} = E_1 - i_b R_1 = 1.04\text{V}$$

Άσκηση 1-3 (*Γράφος κυκλώματος, Μήτρα πρόσπτωσης*)





Κατ'αρχάς αριθμούμε τους κόμβους του κυκλώματος από 1 έως 5, όπως για παράδειγμα φαίνεται στο παραπάνω Σχήμα. Εν συνεχεία σχεδιάζουμε τον προσανατολισμένο γράφο του κυκλώματος, με αρίθμηση κλάδων και φορές αναφοράς που συμφωνούν με τα δεδομένα του Σχήματος αυτού (για τους κλάδους 1-5). Ο προσανατολισμένος γράφος του κυκλώματος φαίνεται στο διπλανό Σχήμα. Οι κλάδοι 6 και 7 αντιστοιχούν στη θύρα εισόδου και εξόδου, αντίστοιχα, για τον τελεστικό ενισχυτή του κυκλώματος.

Η πλήρης μήτρα πρόσπτωσης του γράφου του κυκλώματος είναι (n=5 κόμβοι, και b=7 κλάδοι):

$$A_a = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

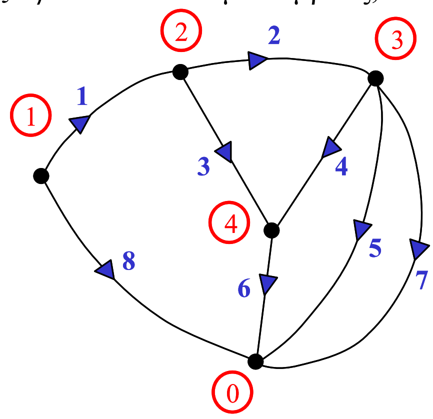
Θεωρώντας ως κόμβο αναφοράς του κυκλώματος τον κόμβο 5 (γείωση), και παραλείποντας την αντίστοιχη γραμμή, παίρνουμε την (ελαττωμένη) μήτρα πρόσπτωσης:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

η οποία μας οδηγεί στο ακόλουθο σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων εξισώσεων των νόμων Kirchhoff:

- *Νόμος Ρευμάτων Kirchhoff* (ΝΡΚ):
  $A \cdot \mathbf{i} = \mathbf{0}$ (όπου **i** το διάνυσμα των ρευμάτων κλάδων $\mathbf{i}=[i_1,i_2,\ldots,i_7]^T$), δηλαδή (n-1)=4 εξισώσεις (μία για κάθε κόμβο, πλήν του κόμβου αναφοράς), με b=7 αγνώστους τα ρεύματα κλάδων.
- *Νόμος Τάσεων Kirchhoff* (ΝΤΚ):
  $\mathbf{v} = A^T \cdot \mathbf{e}$ (όπου **v** το διάνυσμα των τάσεων κλάδων $\mathbf{v}=[v_1,v_2,\ldots,v_7]^T$ και $\mathbf{e}=[e_1,e_2, e_3,e_4]^T$ το διάνυσμα τάσεων κόμβων, πλήν του κόμβου αναφοράς για τον οποίο φυσικά θεωρούμαι $e_5=0$), δηλαδή b=7 εξισώσεις με (n-1)+b=4+7=11 αγνώστους τις τάσεις κόμβων και τις τάσεις κλάδων.

Άσκηση 1-4 (*Εξισώσεις Αραιού Πίνακα* με κόμβους, *Μέθοδος Κόμβων*)



(α) Ο προσανατολισμένος γράφος του κυκλώματος εικονίζεται στο παραπάνω Σχήμα, για τη δοσμένη αρίθμηση κλάδων. Ο κόμβος 0 (γείωση) λαμβάνεται ως κόμβος αναφοράς. Συνολικά έχουμε n=5 κόμβους και b=8 κλάδους.

(β) Η μήτρα πρόσπτωσης A του γράφου του κυκλώματος είναι:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} : \text{ (n-1) x b , δηλαδή 4 x 8}$$

Έστω $\mathbf{e}=[e_1,e_2, e_3,e_4]^T$ το διάνυσμα τάσεων κόμβων, $\mathbf{v}=[v_1,v_2,\ldots,v_8]^T$ το διάνυσμα τάσεων κλάδων, και $\mathbf{i}=[i_1,i_2,\ldots,i_8]^T$ το διάνυσμα ρευμάτων κλάδων. Οι εξισώσεις αραιού πίνακα (με κόμβους) μπορούν να γραφούν στη μορφή:

$$\begin{array}{r} \text{NPK:} \\ \text{NTK:} \\ \text{Περιγραφικες σχεσεις κλαδων:} \end{array} \begin{bmatrix} 0_{(n-1)\times(n-1)} & 0_{(n-1)\times b} & A \\ -A^T & 1_{b\times b} & 0_{b\times b} \\ 0_{b\times(n-1)} & M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}(t) \\ \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{i}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n-1)\times 1} \\ \mathbf{0}_{b\times 1} \\ \boldsymbol{w}_s(t) \end{bmatrix}$$

όπου οι μήτρες M και N γράφονται (στο πεδίο του χρόνου) στη μορφή: $M=M_0D+M_1$ και $N=N_0D+N_1$ (οι bxb μήτρες M_0, M_1, N_0, $N_1 \in \mathbb{R}^{b\times b}$, για γραμμικά χρονικά αμετάβλητα (ΓΧΑ) κυκλώματα, όπως αυτό της συγκεκριμένης άσκησης.)

Για να υπολογίσουμε τις μήτρες M και N, γράφουμε αναλυτικά τις περιγραφικές σχέσεις των b=8 κλάδων:

Κλάδος 1 (γραμμικός αντιστάτης): $v_1(t) - R_1 i_1(t) = 0$ (1)

Κλάδος 2 (γραμμικός πυκνωτής): $C_2 D v_2(t) - i_2(t) = 0$ (2)

Κλάδοι 3 και 4 (συζευγμένοι επαγωγείς): $\begin{bmatrix} v_3(t) \\ v_4(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_3 & M \\ M & L_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Di_3(t) \\ Di_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (3,4)

Κλάδος 5 (γραμμικός αντιστάτης): $v_5(t) - R_5 i_5(t) = 0$ (5)

Κλάδος 6 (γραμμικός πυκνωτής): $C_6 D v_6(t) - i_6(t) = 0$ (6)

Κλάδος 7 (ανεξάρτητη πηγή ρεύματος): $i_7(t) = I_s(t)$ (7)

Κλάδος 8 (ανεξάρτητη πηγή τάσης): $v_8(t) = V_s(t)$ (8)

Επομένως οι αραιοί πίνακες M_0, M_1, N_0, $N_1 \in \mathbb{R}^{b\times b}$ (b=8), καθώς και το (bx1) διάνυσμα εισόδου $\boldsymbol{w}_s(t)$ έχουν τα ακόλουθα μη-μηδενικά στοιχεία:

$M_1[1,1]=1$, και $N_1[1,1]=-R_1$

$M_0[2,2]= C_2$, και $N_1[2,2]=-1$,

$M_1[3,3]=1$, και $N_0[3,3]=-L_3$, $N_0[3,4]=-M$,

$M_1[4,4]=1$, και $N_0[4,3]=-M$, $N_0[4,4]=-L_4$,

$M_1[5,5]=1$, και $N_1[5,5]=-R_5$,

$M_0[6,6]=C_6$, και $N_1[6,6]=-1$,

$N_1[7,7]=1$, και $\mathbf{w}_s[7]=I_s(t)$,

$M_1[8,8]=1$, και $\mathbf{w}_s[8]=V_s(t)$,

Συνολικά δηλαδή οι εξισώσεις αραιού πίνακα οδηγούν στο ακόλουθο σύστημα 20x20 (20=n-1+2b):

$$
\left[\begin{array}{cccc|cccccccc|cccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
-1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_2D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -L_3D & -MD & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -MD & -L_4D & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_5 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_6D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
\cdot
\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \\ i_8 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I_s(t) \\ V_s(t) \end{bmatrix}
$$

(γ) Οι εξισώσεις της μεθόδου των κόμβων έχουν ως στόχο να οδηγήσουν σε ένα μοναδικά επιλύσιμο σύστημα (n-1)x(n-1) της μορφής: $Y_n \cdot \mathbf{e}(t) = \mathbf{I}_{sn}(t)$ με αγνώστους μεταβλητές το διάνυσμα $\mathbf{e} = [e_1, e_2, e_3, e_4]^T$, δηλαδή μόνο τις τάσεις των κόμβων, όπου Y_n: η 4x4 μήτρα αγωγιμοτήτων κόμβων, και $\mathbf{I}_{sn}$: διάνυσμα που περιέχει τις ανεξάρτητες πηγές εισόδου. Στόχο δηλαδή εδώ αποτελεί ο υπολογισμός των Y_n και $\mathbf{I}_{sn}$.

Ξεκινούμε γράφοντας το NPK για κάθε κόμβο του κυκλώματος (εκτός φυσικά του κόμβου αναφοράς στον προσανατολισμένο γράφο του κυκλώματος), αντικαθιστώντας διαδοχικά κάθε εμφανιζόμενη μεταβλητή ρεύματος κλάδου με: (αγωγιμότητα κλάδου)x(τάση κλάδου), για όσες από τις περιγραφικές σχέσεις κλάδων (1)-(8) μπορούν να γραφούν σε μορφή v-ελεγχόμενη, και εν συνεχεία τις τάσεις κλάδων ως αλγεβρική διαφορά τάσεων κόμβων (NTK στον προσανατολισμένο γράφο του κυκλώματος):

Κόμβος 1: $i_1+i_8=0 \Rightarrow (1/R_1)v_1 + i_8 = 0 \Rightarrow G_1(e_1-e_2) + i_8 = 0 \quad (G_1=1/R_1)$ (k-1)

Κόμβος 2: $-i_1+i_2+i_3=0 \Rightarrow -G_1v_1 + C_2Dv_2 + i_3 = 0 \Rightarrow -G_1(e_1-e_2) + C_2D(e_2-e_3) + i_3 = 0$ (k-2)

Κόμβος 3: $-i_2+i_4+i_5+i_7=0 \Rightarrow -C_2Dv_2 + i_4 + G_5v_5 + i_7 = 0 \Rightarrow$

$-C_2D(e_2-e_3) + i_4 + G_5(e_3) = -I_s(t) \quad (G_5=1/R_5)$ (k-3)

Κόμβος 4: $-i_3-i_4+i_6=0 \Rightarrow -i_3 -i_4 + C_6Dv_6 = 0 \Rightarrow -i_3 -i_4 + C_6D(e_4)= 0$ (k-4)

Για τα ρεύματα i_3 και i_4 μπορούμε να γράψουμε από τις σχέσεις (3-4), εφόσον υποθέσουμε ότι η μήτρα L:

$L = \begin{bmatrix} L_3 & M \\ M & L_5 \end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμη και έστω: $\Gamma = L^{-1} = \begin{bmatrix} \Gamma_3 & \Gamma_m \\ \Gamma_m & \Gamma_5 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} i_3(t) \\ i_4(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dfrac{\Gamma_3}{D} & \dfrac{\Gamma_m}{D} \\ \dfrac{\Gamma_m}{D} & \dfrac{\Gamma_5}{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_3(t) \\ v_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3=e_2-e_4, \text{ και } v_4=e_3-e_4 \qquad (3,4)'$$

Έτσι, οι σχέσεις (k1-k4) γράφονται:

Κόμβος 1: $G_1e_1 - G_1e_2 + i_8 = 0$ (k-1)'

Κόμβος 2: $-G_1e_1 + (G_1+C_2D+\Gamma_3/D)e_2 + (-C_2D+\Gamma_m/D)e_3 - (\Gamma_3/D+\Gamma_m/D)e_4 = 0$ (k-2)'

Κόμβος 3: $(-C_2D+\Gamma_m/D)e_2 +(C_2D+G_5+\Gamma_5/D)(e_3) - (\Gamma_5/D+\Gamma_m/D)e_4 = -I_s(t)$ (k-3)'

Κόμβος 4: $-(\Gamma_3/D+\Gamma_m/D)e_2 - (\Gamma_m/D+\Gamma_5/D)e_3 + (\Gamma_3/D+\Gamma_5/D+2\Gamma_m/D+ C_6D)e_4 = 0$ (k-4)'

Επί πλέον έχουμε για την ανεξάρτητη πηγή τάσης (κλάδος 8): $e_1 = V_s(t)$ (k-5)'

Παίρνουμε επομένως ένα σύστημα 5 εξισώσεων (k-1)',..,(k-5)' με 5 αγνώστους, τις τάσεις κλάδων $e_1,\ldots,e_4$, και το άγνωστο ρεύμα της πηγής τάσης i_8 (κλάδος 8).

(Σημείωση: εφαρμόσαμε δηλαδή την τροποποιημένη μέθοδο κόμβων, καθ'ότι υπάρχουν στο κύκλωμα και μη v-ελεγχόμενα στοιχεία)

Παρατηρούμε ωστόσο ότι το ρεύμα i_8 εμφανίζεται μόνο στην πρώτη εξίσωση (k-1)', οπότε κρατώντας τις 4 τελευταίες σχέσεις (k-2)' έως (k-5)' παίρνουμε ένα σύστημα 4 εξισώσεων με αγνώστους τις 4 μεταβλητές τάσεων κόμβων, το οποίο γράφεται πράγματι στη μορφή των εξισώσεων της μεθόδου κόμβων:

$$Y_n \cdot \mathbf{e}(t) = \mathbf{I}_{sn}(t)$$

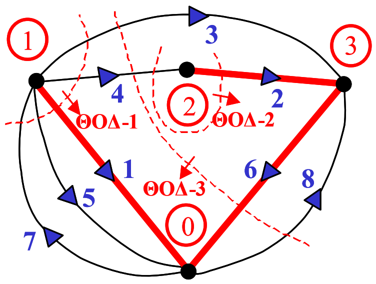
με

$$Y_n = \begin{bmatrix} -G_1 & \left(G_1 + C_2D + \dfrac{\Gamma_3}{D}\right) & \left(-C_2D + \dfrac{\Gamma_m}{D}\right) & -\left(\dfrac{\Gamma_3}{D} + \dfrac{\Gamma_m}{D}\right) \\ 0 & \left(-C_2D + \dfrac{\Gamma_m}{D}\right) & \left(C_2D + G_5 + \dfrac{\Gamma_5}{D}\right) & -\left(\dfrac{\Gamma_5}{D} + \dfrac{\Gamma_m}{D}\right) \\ 0 & -\left(\dfrac{\Gamma_3}{D} + \dfrac{\Gamma_m}{D}\right) & -\left(\dfrac{\Gamma_5}{D} + \dfrac{\Gamma_m}{D}\right) & \left(\dfrac{\Gamma_3}{D} + \dfrac{\Gamma_5}{D} + \dfrac{2\Gamma_m}{D} + C_6D\right) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$\mathbf{I}_{sn}(t) = [0, -I_s(t), 0, V_s(t)]^T$$

<u>Άσκηση 1-5</u> (Ανάλυση κυκλώματος με *Θεμελιώδεις Ομάδες Διαχωρισμού*)



Σχεδιάζουμε αρχικά τον (πλήρη) προσανατολισμένο γράφο του κυκλώματος αντικαθιστώντας κάθε απλό μονόθυρο στοιχείο κυκλώματος με έναν προσανατολισμένο κλάδο στο γράφο, χρησιμοποιώντας τη δοσμένη αρίθμηση και φορές αναφοράς ρευμάτων και τάσεων (όπου αυτά δίδονται). Ο προσανατολισμένος γράφος που προκύπτει εικονίζεται στο διπλανό Σχήμα (n=4 κόμβοι, και b=8 κλάδοι).

(α) Επιλέγουμε, όπως ζητείται από την άσκηση, ένα δέντρο $\mathcal{T}$ = {2,6,1}, το οποίο δηλαδή περιέχει ως βλαστούς τους κλάδους 1, 2, και 6. Σε κάθε βλαστό αντιστοιχεί μια θεμελιώδης ομάδα διαχωρισμού (ΘΟΔ, fundamental cut-set), όπως φαίνεται στο παραπάνω Σχήμα. Έχουμε:

ΘΟΔ-1: {1, 3, 4, 5, <u>7</u>}

ΘΟΔ-2: {2, <u>4</u>}

ΘΟΔ-3: {6, <u>3</u>, <u>4</u>, <u>8</u>}

Σημείωση: κάθε ΘΟΔ περιέχει ένα μόνο βλαστό (η αφαίρεση του οποίου αποσυνδέει τους κόμβους του *δέντρου* σε δύο μη συνεκτικά υποσύνολα/υπογράφους), και έναν ελάχιστο αριθμό συνδέσμων, η αφαίρεση των οποίων αποσυνδέει τα δύο αυτά υποσύνολα κόμβων και πάνω στον *πλήρη γράφο* του κυκλώματος. Ο βλαστός που αντιστοιχεί σε κάθε ΘΟΔ ορίζει και τη *θετική φορά αναφοράς* αυτής. Με υπογράμμιση, παραπάνω, σημειώνουμε τους συνδέσμους κάθε ΘΟΔ που έχουν φορά αντίθετη της θετικής φοράς αναφοράς της αντίστοιχης ΘΟΔ.

Η *μήτρα Θεμελιωδών Ομάδων Διαχωρισμού* που αντιστοιχεί στο δέντρο $\mathcal{T}$ είναι επομένως:

$$Q=\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \Theta O\Delta-1 \\ \Theta O\Delta-2 \\ \Theta O\Delta-3 \end{array} \\ \text{κλαδοι}\;\; 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \end{array} \tag{1}$$

(β-γ) Για να υπολογίσουμε τη *μήτρα αγωγιμοτήτων ομάδων διαχωρισμού* Y_q, πρέπει αρχικά να εκφράσουμε, από τις περιγραφικές σχέσεις των κλάδων του κυκλώματος, τη μήτρα αγωγιμοτήτων κλάδων Y_b, δηλαδή να γράψουμε τις περιγραφικές σχέσεις κλάδων στη μορφή:

$$\mathbf{i} = Y_b\mathbf{v} + \mathbf{i}_{sb} \;\; (+\, \mathbf{i}_b^{(i)}) \tag{2}$$

όπου $\mathbf{i}$ και $\mathbf{v}$ το διάνυσμα ρευμάτων και τάσεων κλάδων, αντίστοιχα, και $\mathbf{i}_{sb}$ διάνυσμα το οποίο περιέχει τις ανεξάρτητες πηγές εισόδου (στο διάνυσμα $\mathbf{i}_{sb}$ προστίθεται και ένα διάνυσμα $\mathbf{i}_b^{(i)}$, που εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες, όταν οι σχέσεις εκφράζονται στο πεδίο της συχνότητας). Η bxb μήτρα Y_b ονομάζεται *μήτρα αγωγιμοτήτων κλάδων*, και προκύπτει άμεσα από τις περιγραφικές σχέσεις των στοιχείων ενός κυκλώματος, όταν αυτές μπορούν να γραφούν σε μορφή v-ελεγχόμενη.

Χρησιμοποιώντας τη μήτρα θεμελιωδών ομάδων διαχωρισμού, μπορούμε ως γνωστόν να εκφράσουμε ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο των νόμων Kirchhoff ως εξής:

NPK: $$Q \cdot \mathbf{i} = \mathbf{0} \tag{3}$$

NTK: $$\mathbf{v} = Q^T \cdot \mathbf{v_t} \tag{4}$$

όπου $\mathbf{v_t}$ το διάνυσμα τάσεων των βλαστών, δηλαδή εδώ: $\mathbf{v_t} = [v_1, v_2, v_6]^T$

Συνδυάζοντας τις (2) και (3) παίρνουμε: $Q \cdot (Y_b\mathbf{v} + \mathbf{i}_{sb}) = \mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; (Q \cdot Y_b)\,\mathbf{v} = -Q\,\mathbf{i}_{sb}$

οπότε, λόγω και της (4), παίρνουμε τελικά:

$$(Q \cdot Y_b \cdot Q^T)\, \mathbf{v_t} = -Q\, \mathbf{i}_{sb} \tag{5}$$

δηλαδή:

$$\boxed{\begin{array}{ll} & Y_q\, \mathbf{v_t} = \mathbf{i}_{sq} \quad (6) \\ \text{όπου:} & Y_q = Q \cdot Y_b \cdot Q^T \ \text{ και } \ \mathbf{i_{sq}} = -Q\, \mathbf{i}_{sb} \quad (7) \end{array}}$$

Η μέθοδος αυτή (*μέθοδος θεμελιωδών ομάδων διαχωρισμού* - cut set analysis) οδηγεί δηλαδή σε ένα σύνολο (n-1) γραμμικά ανεξάρτητων εξισώσεων, με αγνώστους τις (n-1) τάσεις των βλαστών.

Για το συγκεκριμένο κύκλωμα της άσκησης γράφουμε τις περιγραφικές σχέσεις των στοιχείων των κλάδων σε v-ελεγχόμενη μορφή (στο πεδίο της συχνότητας):

Κλάδος (1): $I_1(s) = sC_1 \cdot V_1(s) - C_1 v_1(0)$ (k-1)

Κλάδος (2): $I_2(s) = sC_2 \cdot V_2(s) - C_2 v_2(0)$ (k-2)

Κλάδος (3): $sL_3 \cdot I_3(s) - L_3\, i_3(0) = V_3(s) \Leftrightarrow I_3(s) = (1/sL_3) \cdot V_3(s) + (1/s)\, i_3(0)$ (k-3)

Κλάδος (4): $sL_4 \cdot I_4(s) - L_4\, i_4(0) = V_4(s) \Leftrightarrow I_4(s) = (1/sL_4) \cdot V_4(s) + (1/s)\, i_4(0)$ (k-4)

Κλάδος (5): $I_5(s) = (1/R_5) \cdot V_5(s)$ (k-5)

Κλάδος (6): $I_6(s) = (1/R_6) \cdot V_6(s)$ (k-6)

Κλάδος (7): $I_7(s) = I_s(s)$ (k-7)

Κλάδος (8): $I_8(s) = g_m \cdot V_1(s)$ (k-8)

Θεωρώντας μηδενικές αρχικές συνθήκες, παίρνουμε επομένως για τη μήτρα αγωγιμοτήτων κλάδων (βλέπε σχέση (2)):

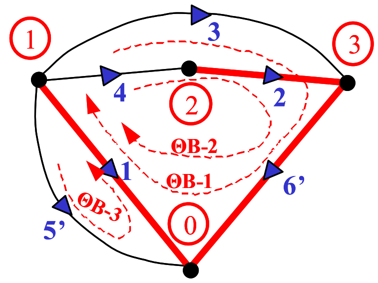
$$Y_b = \begin{bmatrix} sC_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sC_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1/sL_3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1/sL_4) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1/R_5) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1/R_6) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{i}_{sb} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I_s(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Έχοντας υπολογίσει τη μήτρα αγωγιμοτήτων κλάδων Y_b και το διάνυσμα $\mathbf{i}_{sb}$ μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα πλέον τη μήτρα αγωγιμοτήτων ομάδων διαχωρισμού Y_q, και να γράψουμε τις εξισώσεις της μεθόδου θεμελιωδών ομάδων διαχωρισμού, από τις σχέσεις (6) και (7).

$$Y_q = \begin{bmatrix} sC_1 + \frac{1}{sL_3} + \frac{1}{sL_4} + \frac{1}{R_5} & -\frac{1}{sL_4} & -\left(\frac{1}{sL_3} + \frac{1}{sL_4}\right) \\ -\frac{1}{sL_4} & sC_2 + \frac{1}{sL_4} & \frac{1}{sL_4} \\ -\left(\frac{1}{sL_3} + \frac{1}{sL_4}\right) - g_m & \frac{1}{sL_4} & \frac{1}{sL_3} + \frac{1}{sL_4} + \frac{1}{R_6} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{i}_{sq} = \begin{bmatrix} I_s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 1-6 (Ανάλυση κυκλώματος με τη μέθοδο *Θεμελιωδών Βρόχων*)

Αρχική παρατήρηση: για να εφαρμοσθεί η μέθοδος θεμελιωδών βρόχων, πρέπει οι περιγραφικές σχέσεις των στοιχείων του κυκλώματος να μπορούν να γραφούν σε μορφή i-ελεγχόμενη. Στο δοσμένο κύκλωμα της άσκησης, υπάρχουν δύο πηγές ρεύματος, μία ανεξάρτητη πηγή I_s (κλάδος 7), και μια εξαρτημένη πηγή ελεγχόμενη από τάση (κλάδος 8). Τα στοιχεία αυτά δεν μπορούν να γραφούν άμεσα σε μορφή i-ελεγχόμενη, οπότε απαιτείται να γίνει κάποιος μετασχηματισμός. Ο απλούστερος τρόπος είναι να θεωρήσουμε κάθε παράλληλη σύνδεση πηγής ρεύματος με ένα απλό μονόθυρο στοιχείο (π.χ. αντιστάτη), ως ένα σύνθετο μονόθυρο στοιχείο, με ένα συνολικό εισερχόμενο ρεύμα, και να το αντικαταστήσουμε με ένα μοναδικό κλάδο στον προσανατολισμένο γράφο του κυκλώματος. Έτσι παίρνουμε ένα νέο απλοποιημένο γράφο:



όπου ο κλάδος 5' αντιστοιχεί στην παράλληλη σύνδεση της ανεξάρτητης πηγής ρεύματος I_s με την αντίσταση R_5 (αντικαθιστά δηλαδή τους κλάδους 5 και 7 του πλήρους γράφου -βλέπε άσκηση 1-5), και ο κλάδος 6' αντιστοιχεί στην παράλληλη σύνδεση του μετατροπέα τάσης σε ρεύμα $g_m v_1$ με την αντίσταση R_6 (αντικαθιστά δηλαδή τους κλάδους 6 και 8 του πλήρους γράφου). Οι νέες περιγραφικές σχέσεις για τους κλάδους 5' και 6' του απλοποιημένου γράφου του κυκλώματος (οι οποίες αντικαθιστούν τις σχέσεις (k-5) έως (k-8) της προηγούμενης άσκησης, έχοντας: $I_{5'}= I_5-I_7$, $V_{5'}=V_5=R_5I_5$ και $I_{6'}= I_6-I_8$, $V_{6'}=V_6=R_6I_6$) είναι τώρα :

Κλάδος (5'): $I_{5'}(s) = (1/R_5) \cdot V_{5'}(s) - I_s(s) \;\Leftrightarrow\; V_{5'}(s) = R_5 I_{5'}(s) + R_5 I_s(s)$ (k-5')

Κλάδος (6'): $I_{6'}(s) = (1/R_6) \cdot V_{6'}(s) - g_m \cdot V_1(s) \;\Leftrightarrow\; V_{6'}(s) = R_6 I_{6'}(s) + R_6 g_m V_1(s)$ (k-6')

Η ανάλυση που ακολουθεί είναι η δυϊκή (dual) της αντίστοιχης ανάλυσης που έγινε στην προηγούμενη άσκηση 1-5, ερωτήματα (α)-(γ).

(α) Θεωρώντας και πάλι δέντρο $\mathcal{T}$ το οποίο περιέχει ως βλαστούς τους κλάδους 1, 2 και τώρα τον 6', έχουμε b'-n+1 = 3 συνδέσμους (n=4, b'=6), τους κλάδους 3, 4 και 5'. Κάθε ένας σύνδεσμος ορίζει κατά τα γνωστά ένα θεμελιώδη βρόχο (ΘΒ), όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, δηλαδή:

ΘΒ-1: {3 → 6' → 1}

ΘΒ-2: {4 → 2 → 6' → 1}

ΘΒ-3: {5' → 1}

Σημείωση: κάθε ΘΒ περιέχει ένα μόνο σύνδεσμο, και εν συνεχεία τη διαδρομή πάνω στο δέντρο (δηλαδή, ακολουθία βλαστών) η οποία κλείνει το βρόχο. Ο σύνδεσμος που αντιστοιχεί σε κάθε ΘΒ ορίζει και τη *θετική φορά αναφοράς* (διαγραφής) αυτού. Με υπογράμμιση, παραπάνω, σημειώνουμε τους βλαστούς κάθε ΘΒ που έχουν φορά αντίθετη της θετικής φοράς αναφοράς του αντίστοιχου ΘΒ.

Η *μήτρα Θεμελιωδών Βρόχων* που αντιστοιχεί στο δέντρο $\mathcal{T}$ είναι επομένως:

$$B = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \text{κλαδοι} \end{array}\begin{array}{c}\left[\begin{array}{cccccc} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5' & 6 \end{array}\end{array}\begin{array}{l} \Theta B-1 \\ \Theta B-2 \\ \Theta B-3 \\ \ \end{array} \qquad (1)$$

(β-γ) Για να υπολογίσουμε τη *μήτρα συνθέτων αντιστάσεων βρόχων* Z_l, πρέπει αρχικά να εκφράσουμε, από τις περιγραφικές σχέσεις των κλάδων του κυκλώματος, τη μήτρα συνθέτων αντιστάσεων κλάδων Z_b, δηλαδή να γράψουμε τις περιγραφικές σχέσεις κλάδων στη μορφή:

$$\mathbf{v} = Z_b\mathbf{i} + \mathbf{v}_{sb} \quad (+\ \mathbf{v}_b^{(i)}) \qquad (2)$$

όπου $\mathbf{i}$ και $\mathbf{v}$ το διάνυσμα ρευμάτων και τάσεων κλάδων, αντίστοιχα, και $\mathbf{v}_{sb}$ διάνυσμα το οποίο περιέχει τις ανεξάρτητες πηγές εισόδου (στο διάνυσμα $\mathbf{v}_{sb}$ προστίθεται και ένα διάνυσμα $\mathbf{v}_b^{(i)}$, που εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες, όταν οι σχέσεις εκφράζονται στο πεδίο της συχνότητας). Η bxb μήτρα Z_b ονομάζεται *μήτρα συνθέτων αντιστάσεων κλάδων*, και προκύπτει άμεσα από τις περιγραφικές σχέσεις των στοιχείων ενός κυκλώματος, όταν αυτές μπορούν να γραφούν σε μορφή i-ελεγχόμενη.
Χρησιμοποιώντας τη μήτρα θεμελιωδών βρόχων B, μπορούμε να εκφράσουμε ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο των νόμων Kirchhoff ως εξής:

NPK: $\mathbf{i} = B^T \cdot \mathbf{i_l}$ (3)

NTK: $B \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ (4)

όπου $\mathbf{i_l}$ το διάνυσμα ρευμάτων των συνδέσμων, δηλαδή: $\mathbf{i_l} = [i_3, i_4, i_{5'}]^T$
Συνδυάζοντας τις (2) και (3) παίρνουμε: $B \cdot (Z_b\mathbf{i} + \mathbf{v}_{sb}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow (B \cdot Z_b)\,\mathbf{i} = -B\,\mathbf{v}_{sb}$
οπότε, λόγω και της (4), παίρνουμε τελικά:

$$(B \cdot Z_b \cdot B^T)\,\mathbf{i_l} = -B\,\mathbf{v}_{sb} \qquad (5)$$

δηλαδή:

$$\boxed{\begin{array}{ll} & Z_l\,\mathbf{i_l} = \mathbf{v}_{sl} \qquad (6) \\ \text{όπου:} & Z_l = B \cdot Z_b \cdot B^T \ \text{ και } \ \mathbf{v_{sl}} = -B\,\mathbf{v}_{sb} \qquad (7) \end{array}}$$

Η μέθοδος αυτή (*μέθοδος θεμελιωδών βρόχων* - fundamental loop analysis) οδηγεί δηλαδή σε ένα σύνολο (b-n+1) γραμμικά ανεξάρτητων εξισώσεων, με αγνώστους τα (b-n+1) ρεύματα των συνδέσμων.

Για το συγκεκριμένο κύκλωμα της άσκησης γράφουμε τις περιγραφικές σχέσεις των στοιχείων των κλάδων σε i-ελεγχόμενη μορφή (στο πεδίο της συχνότητας, θεωρώντας μηδενικές αρχικές συνθήκες):

Κλάδος (1): $V_1(s) = (1/sC_1) \cdot I_1(s)$ (k-1')

Κλάδος (2): $V_2(s) = (1/sC_2) \cdot I_2(s)$ (k-2')

Κλάδος (3): $V_3(s) = (sL_3) \cdot I_3(s)$ (k-3')

Κλάδος (4): $V_4(s) = (sL_4) \cdot I_4(s)$ (k-4')

Οι σχέσεις αυτές συμπληρώνονται από τις (k-5') και (k-6'):

Κλάδος (5'): $V_{5'}(s) = R_5\, I_{5'}(s) + R_5\, I_s(s)$ (k-5')

Κλάδος (6'): $V_{6'}(s) = R_6\, I_{6'}(s) + R_6\, g_m V_1(s)$ (k-6')

Επιπλέον, από την (k-1') η (k-6') γράφεται:

Κλάδος (6'): $V_{6'}(s) = R_6\, I_{6'}(s) + R_6\, g_m\, (1/sC_1) \cdot I_1(s)$ (k-6'')

Παίρνουμε επομένως για τη μήτρα συνθέτων αντιστάσεων κλάδων (βλέπε σχέση (2)):

$$Z_b = \begin{bmatrix} (1/sC_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1/sC_2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (sL_3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (sL_4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_5 & 0 \\ R_6 g_m (1/sC_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & R_6 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{v}_{sb} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ R_5 I_s(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Έχοντας υπολογίσει τη μήτρα συνθέτων αντιστάσεων κλάδων Z_b και το διάνυσμα $\mathbf{v}_{sb}$ μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα πλέον τη μήτρα συνθέτων αντιστάσεων βρόχων Z_l, και να γράψουμε τις εξισώσεις της μεθόδου θεμελιωδών βρόχων, από τις σχέσεις (6) και (7).

$$Z_l = \left[\begin{array}{c:c:c} \dfrac{1}{sC_1} + sL_3 + R_6\left(1 - \dfrac{g_m}{sC_1}\right) & \dfrac{1}{sC_1} + R_6\left(1 - \dfrac{g_m}{sC_1}\right) & \dfrac{1}{sC_1}\left(1 - g_m R_6\right) \\ \dfrac{1}{sC_1} + R_6\left(1 - \dfrac{g_m}{sC_1}\right) & \dfrac{1}{sC_1} + \dfrac{1}{sC_2} + sL_4 + R_6\left(1 - \dfrac{g_m}{sC_1}\right) & \dfrac{1}{sC_1}\left(1 - g_m R_6\right) \\ \dfrac{1}{sC_1} & \dfrac{1}{sC_1} & \dfrac{1}{sC_1} + R_5 \end{array}\right] \quad \text{και} \quad \boldsymbol{v}_{sl} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -R_5 I_s \end{bmatrix}$$